गणित

उच्चतर माध्यमिक विद्यालयों के लिए पाठ्यपुस्तक

भाग II

(कक्षा XI)

सम्पादक मंडल

गणित

उच्चतर माध्यमिक विद्यालयों के लिए पाठ्यपुस्तक

भाग II

(कक्षा XI)

डा० राम औतार डा० बी० देवकीनन्दन

श्री जी० डी० ढल डा० एस० के० सिंह गौतम

डा० टी० जे० एस० मेहरोक

सम्पादक

डा० डी० पी० गुप्ता डा० टी० जे० एस० मेहरोक

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

पुस्तक का प्रथम संस्करण राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् की अनुमति से दिसम्बर, 1977 में मैसर्स एस० चन्द एण्ड कम्पनी, नई दिल्ली द्वारा परिषद् की अनुमति से प्रकाशित हुआ।

यह पुनर्मुद्रण राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् द्वारा प्रकाशित किया गया है।

जून 1979
ज्येष्ठ 1901

P.D.4T

मूल्य : रु० 4.75

प्रकाशन विभाग से श्री विनोद कुमार पंडित, सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविन्द मार्ग, नई दिल्ली 110016 द्वारा प्रकाशित तथा अशोका आफसेट वर्क्स, 308/2, शहजादा बाग, पुरानी रोहतक रोड, दिल्ली 110035 में मुद्रित।

प्राक्कथन

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने 10+2 पद्धति के अनुसार कक्षा XI और XII की पाठ्यपुस्तकों तथा उनसे सम्बद्ध अन्य सामग्री का निर्माण करने में डा० जे० एन० कपूर को उनके अनुभवों का लाभ उठाने की दृष्टि से सम्पादक मण्डल के अध्यक्ष के रूप में नियुक्त किया। विविध गोष्ठियों में देश के विभिन्न भागों से आये गणित के शिक्षकों, विषय विशेषज्ञों, राज्य शिक्षा-संस्थानों के प्रतिनिधियों तथा गणित का उपयोग करने वाले व्यक्तियों द्वारा तैयार किये गए गणित के पाठ्यक्रम की रूपरेखा सम्पादक मण्डल को प्रदान की गई। पाठ्यपुस्तक तैयार करने से पूर्व पाठ्यक्रम में आवश्यकतानुसार परिवर्तन करने का अधिकार सम्पादक मण्डल को दे दिया गया था।

इस पुस्तक का प्रथम प्रारूप राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् के डा० राम औतार, डा० देवकीनन्दन भार्गव, श्री ज्ञानेश्वरदत्त ढल, डा० सुरेश कुमार सिंह गौतम तथा डा० तजिन्दर जीत सिंह महरोक द्वारा तैयार किया गया। इस कार्य के लिये श्री ज्ञानेश्वरदत्त ढल को छोड़कर अन्य सभी ने कानपुर, बनारस तथा इलाहाबाद में काफी समय व्यतीत किया और डा० जे० एन० कपूर, डा० आर० एस० मिश्रा तथा डा० डी० पी० गुप्ता से प्रत्यक्ष मार्ग दर्शन और सहायता प्राप्त की।

पाठ्यपुस्तक का प्रारूप सम्पादक मण्डल की कई बैठकों में सदस्यों द्वारा सविस्तार रूप से चर्चित हुआ। तत्पश्चात् राष्ट्रीय शिक्षा संस्थान में विशेष रूप से आयोजित दिल्ली के गणित शिक्षकों को यह प्रारूप दिखाया गया। इस कार्य के लिए परिषद्, सम्पादक मण्डल के सदस्यों तथा उसके अध्यक्ष डा० जे० एन० कपूर के प्रति विशेष रूप से आभारी है, जिन्होंने अपने अन्य महत्त्वपूर्ण कार्यों के होते हुए भी इस उत्तरदायित्व को स्वीकार किया तथा इतने अल्पकाल में इस कार्य को सम्पन्न करने में मार्ग दर्शन प्रदान किया।

इस पुस्तक का अन्तिम रूप और पाठ्य-सामग्री के सम्पादन का कार्य डा० डी० पी० गुप्ता तथा डा० तजिन्दर जीत सिंह महरोक ने किया है। प्रश्नों के उत्तर डा० बी० एस० बूब तथा डा० राजेन्द्र प्रसाद गुप्ता ने तैयार किये हैं और पुस्तक का हिन्दी अनुवाद बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय के गणित विभाग के डा० एस० एन० सिंह ने किया है। हिन्दी संस्करण का विषय सम्पादन डा० सुरेश कुमार सिंह गौतम ने किया है। मैं इन सभी के प्रति आभारी हूँ। मैं इनकी इस भावना की सराहना करता हूँ जिसके अनुसार इन्होंने निश्चित समय में ही सारा कार्य मिलजुल कर पूरा किया।

यह पुस्तक का प्रथम संस्करण है। परिषद् इस पुस्तक का उपयोग करने वालों के सुझाव, प्रतिक्रियाओं तथा पुस्तक के सुधार के लिये उनके सुझावों का स्वागत करेगी।

शिव के० मित्र

निदेशक

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और

प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली

प्रस्तावना

10+2 की नवीन शिक्षा पद्धति के अन्तर्गत कक्षा XI एवं XII के गणित विषय के लिये पाठ्यपुस्तक एवं अन्य पाठ्य सामग्री तैयार कराने के लिए राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने लगभग एक वर्ष पहले एक संपादक मण्डल का गठन किया था। सम्पादक मण्डल ने सबसे पहले इन सम्भावनाओं पर विचार-विमर्श किया कि (क) अध्यापकों और शिक्षाविदों से विचार विमर्श करने के बाद इस स्तर के लिए एक नया पाठ्यक्रम विकसित किया जाय, (ख) कला, भौतिक विज्ञान, जीव विज्ञान एवं वाणिज्य धाराओं के लिए अलग-अलग पुस्तकें लिखी जाएँ, तथा (ग) अध्यापक संदर्शिकाएँ और विद्यार्थियों के लिए ज्ञानवर्धक अन्य अतिरिक्त सामग्री तैयार की जाए। पर इस दृष्टि से कि पाठ्यपुस्तक की पांडुलिपि सितम्बर 6 तक तैयार कर लेनी है, यह सोचा गया कि राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् द्वारा पहले से तैयार पाठ्यक्रम में कुछ संशोधन करके सबसे पहले एक पाठ्यपुस्तक तैयार कर ली जाए। शेष समस्याओं पर बाद में विचार किया जा सकता है।

सम्पादक मण्डल ने निर्णय लिया कि पाठ्यपुस्तक की पांडुलिपि तैयार करने के लिए दो समितियां गठित की जाएँ। पहली समिति में मेरठ विश्वविद्यालय के प्रोफेसर एम० के० सिंगल और बम्बई विश्वविद्यालय के प्रोफेसर एम० एल० वैद्य को रखा गया और दूसरी समिति में राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् के डा० राम औतार, डा० देवकीनन्दन भार्गव, श्री ज्ञानेश्वरदत्त ढल, डा० सुरेश कुमार सिंह गौतम तथा डा० तजिन्दर जीत सिंह महरोक को रखा गया था। संपादक मण्डल ने पांडुलिपि तैयार करने के लिए आठ बार विचार विमर्श किया है। प्रत्येक अध्याय को स्वीकृत करने से पहले दो या तीन बार संशोधित किया गया है।

सम्पादक मण्डल ने ऐसी पुस्तक तैयार करने का प्रयास किया है जो गणित की दृष्टि से सही हो, रुचिकर शैली में लिखी गई हो, और कक्षा XI और XII के अधिकांश छात्रों के लिए उपयोगी हो।

मैं उन सभी साथियों के प्रति आभार प्रकट करता हूँ जिन्होंने गम्भीरतापूर्वक और दायित्व के साथ इस पुस्तक को तैयार करने में सहयोग दिया है। टाटा इन्स्टीट्यूट ऑफ फंडामेण्टल रिसर्च के प्रोफेसर के० जी रामनाथन ने पुस्तक के सभी अध्यायों को समीक्षात्मक दृष्टि से देखा और अपने महत्त्वपूर्ण सुझाव दिये हैं। यही नहीं उन्होंने इस पुस्तक के कुछ अध्यायों को अन्तिम रूप से लिखने का कार्य भी किया है। बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय के गणित विभाग के अध्यक्ष प्रोफेसर आर० एस० मिश्रा ने इस पुस्तक के सभी अध्यायों को देखा है और इस पुस्तक का हिन्दी अनुवाद भी उनकी देख-रेख में सम्पन्न हुआ है। मोतीलाल नेहरू इन्जीनियरिंग कालेज, इलाहाबाद के गणित विभाग के अध्यक्ष प्रोफेसर डी० पी० गुप्ता की देख-रेख में इस पुस्तक के कुछ अध्यायों का लेखन एवं संशोधन कार्य हुआ है। मदुराई विश्वविद्यालय के गणित विभाग के अध्यक्ष प्रोफेसर एम० वेंकट को U. S. A. के अनुबन्ध पर बाहर जाना पड़ा, किन्तु सम्पादक मण्डल की प्रथम तीन गोष्ठियों में उन्होंने बहुत ही महत्त्वपूर्ण सुझाव दिये हैं। राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् के गणित के प्रोफेसर, डा० मनमोहन सिंह अरोरा, ने कुछ गोष्ठियों में भाग लिया और साथ ही डा० राजेन्द्र प्रसाद गुप्ता तथा डा० तजिन्दर जीत सिंह महरोक के साथ प्रश्नों के हल तैयार करने में भी सहयोग प्रदान किया है। डा० राजेन्द्र

प्रसाद गुप्ता तथा डा० तजिन्दर जीत सिंह महरोक ने प्रेस में पुस्तक के मुद्रण कार्य को देखा और सहयोग प्रदान किया। राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् के डा० तजिन्दर जीत सिंह महरोक ने इस पुस्तक के कई अध्यायों को बार-बार लिखा है और इसके लिए उन्हें सम्पादक मण्डल के कई सदस्यों से विचार विमर्श करने के लिए कानपुर, इलाहाबाद तथा बनारस कई बार जाना पड़ा है। सम्पादक मण्डल के प्रत्येक सदस्य ने इस पुस्तक की रचना में महत्त्वपूर्ण सहयोग दिया है।

मैं पुस्तक लिखने वाले सभी सदस्यों का बहुत आभार मानता हूँ जिन्होंने धैर्य पूर्वक सम्पादक मण्डल के सदस्यों के निर्देश के अनुसार पुस्तक के कुछ अध्यायों को बार-बार लिखा है।

मैं प्रोफेसर मनमोहन सिंह अरोरा का आभारी हूँ जिन्होंने पुस्तक के कुछ अध्यायों के प्रारूप को दिल्ली के अध्यापकों को दिखाकर उनके सुझाव ग्रहण किये हैं जो सम्पादक मण्डल के लिए बहुत ही महत्त्वपूर्ण सिद्ध हुए हैं।

सम्पादक मण्डल यह मानता है कि समयाभाव के कारण प्रस्तुत पुस्तक अपने आप में परिपूर्ण नहीं बन पाई है फिर भी यह विश्वास है कि यह पुस्तक अपने विषय की वर्तमान अन्य पुस्तकों से श्रेष्ठतर है। गणित शास्त्र को अपेक्षाकृत अधिक आधुनिक और स्पष्टतर रूप में प्रस्तुत करने का हर सम्भव प्रयत्न किया गया है। इसमें आगे सुधार के लिए प्रत्येक सुझाव का स्वागत किया जायेगा।

जे० एन० कपूर
अध्यक्ष
सम्पादक मण्डल

कानपुर
जून *1977*

कृतज्ञताज्ञापन

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् निम्नलिखित व्यक्तियों की आभारी है जिन्होंने राष्ट्रीय शिक्षा संस्थान में 15 जनवरी, 1977 को आयोजित कार्यशिविर में भाग लेकर इस पाठ्यपुस्तक को विकसित करने में बहुमूल्य योगदान दिया :

1. डा० मनमोहन सिंह अरोरा
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
2. डा० राम औतार
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
3. डा० बी० देवकीनन्दन
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
4. श्री जी० डी० ढल
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
5. डा० एस० के० सिंह गौतम
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
6. श्री महेशचन्द्र गुप्ता
   केन्द्रीय विद्यालय, आर० के० पुरम, नई दिल्ली
7. श्री मोहन कुमार
   मदर्स इण्टरनेशनल स्कूल, नई दिल्ली
8. डा० टी० जे० एस० महरोक
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
9. श्रीमती संतोष मुहिन्द्रू
   एल० एल० हायर सेकेण्ड्री स्कूल, मालवीय नगर, नई दिल्ली
10. श्री विजयकुमार रजवाड़
    दिल्ली पब्लिक स्कूल, आर० के० पुरम, नई दिल्ली
11. श्री ए० के० समतानी
    दिल्ली पब्लिक स्कूल, आर० के० पुरम, नई दिल्ली

विषय-सूची

	पृष्ठ
सम्पादक मण्डल	ii
प्राक्कथन	v
प्रस्तावना	vii
कृतज्ञताज्ञापन	ix
अध्याय 5 सदिश	**91**
भूमिका	91
सदिशों का योग	97
सदिश योग के गुण-धर्म	99
सदिश के घटक	108
त्रिविमीय आयताकार निर्देशांक पद्धति	112
सदिशों का गुणनफल	120
सदिश गुणनफल अथवा क्रास गुणनफल	129
अदिश त्रिक गुणनफल	136
अध्याय 6 सारणिक तथा अव्यूह (मैट्रिक्स)	**142**
सारणिक	142
सारणिकों के गुण-धर्म	152
आव्यूह	157
आव्यूह के प्रकार	158
सारणिकों पर संक्रियाएँ	158
व्युत्क्रम आव्यूह	167
रैखिक समीकरण-निकाय	172
ज्यामितीय रूपान्तरण तथा आव्यूह	176
अध्याय 7 निर्देशांक ज्यामिति	**190**
भूमिका	190
दिष्ट रेखाखण्ड	190
दो बिन्दुओं के बीच की दूरी	192
रेखा-खण्ड का विभाजन-बिन्दु	194
रेखा की प्रवणता	197

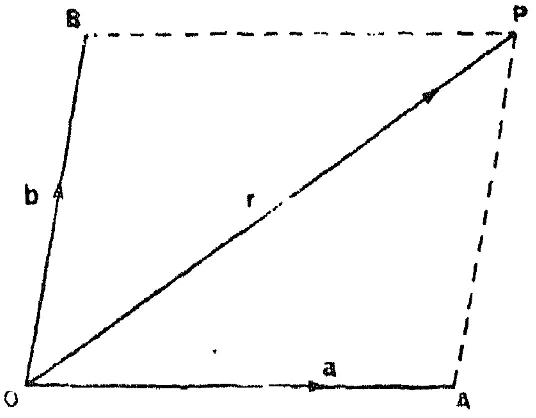
समान्तर तथा लंब रेखाएँ	199
प्रतिच्छेदी रेखाओं से निर्मित कोण	201
त्रिभुज का क्षेत्रफल	203
ज्यामितीय प्रमेयों की विश्लेषिक उपपत्ति	206
बिन्दु-पथ तथा समीकरण	210
सरल रेखा	214
समीकरण का बिन्दु-प्रवणता स्वरूप	214
समीकरण का प्रवणता-अन्तः खण्ड स्वरूप	215
सरल रेखा तथा समीकरण $Ax+By+C=0$	216
सरल रेखा के समीकरण का लंब स्वरूप	217
समीकरण का द्वि-बिन्दु स्वरूप	219
एक बिन्दु से एक रेखा की दूरी	222
रेखा-कुल	223
वृत्त	227
वृत्त पर स्पर्शी तथा अभिलम्ब के समीकरण	230
वृत्त-कुल	233
अध्याय 8 फलन	**237**
भूमिका	237
वास्तविक फलनों के लेखा चित्र	239
बहुपद फलन	244
परिमेय फलन	245
फलनों का इतिहास	246
अध्याय 9 त्रिकोणमिति	**247**
भूमिका	247
मौलिक धारणा	247
वृत्तीय फलन	251
त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ	254
त्रिकोणमितीय-फलनों के योग का सूत्र	257
त्रिकोणमितीय समीकरणों का हल	264
त्रिभुजों के गुण-धर्म	267
उपयोग	270
उत्तरमाला	**275**

सदिश

5.1 भूमिका (Introduction)

भौतिक समस्याओं का अध्ययन, प्रायः नवीन एवं समृद्ध गणितीय संकल्पनाओं की ओर अग्रसर करता है। ये संकल्पनायें विशेषतया इस दृष्टि से बहुत ही उपयोगी हैं कि उनसे बहुत सी भौतिक स्थितियों के विश्लेषण एवं वर्णन की आसान विधियों का प्रतिपादन होता है। इस अध्याय में, हम एक ऐसी ही संकल्पना को प्रस्तुत करेंगे और उसका अध्ययन करेंगे।

यह बहुत पहले से देखा गया है कि किसी भौतिक राशि की व्याख्या करने में एकल संख्या पर्याप्त नहीं है। उदाहरणस्वरूप, एक गतिशील वस्तु जैसे : हो सकता है कि एक कार की चाल तो ज्ञात हो परन्तु जब तक उसकी गति, दिशा ज्ञात न हो उसकी गति का पूर्णरूपेण वर्णन नहीं किया जा सकता। इसी प्रकार, बल (Force) को व्यक्त करने के लिए, यह आवश्यक है कि एक संख्या [बल का कांतिमान, (magnitude)] एक दिशा (बल अनुप्रयोग की दिशा) तथा अनुप्रयोग बिन्दु (point of application) का ज्ञान हो। इनमें से, प्रथम दो लक्षणों से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि, एक बल को ज्यामितीय ढंग से दिष्ट रेखाखण्ड (directed line segment) OP से प्रदर्शित किया जा सकता है। जैसा कि आकृति 5.1 में दिखाया गया है।



आकृति 5.1

रेखाखण्ड की लम्बाई बल के कान्तिमान के समानुपातिक (proportional) होती है। और उसकी दिशा बल के कार्य करने की दिशा में होती है। दिष्ट रेखाखण्ड को **r**, **a**, **b** इत्यादि प्रकार के प्रतीकों से प्रदर्शित किया जायगा।

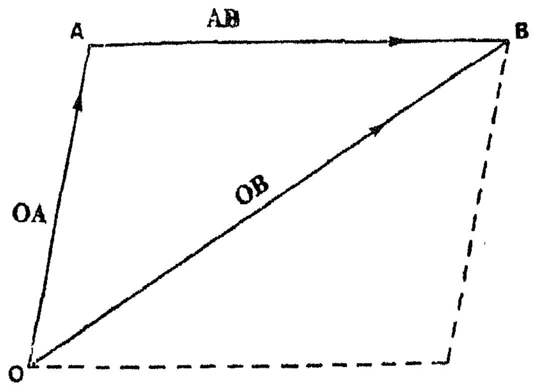
प्रयोगों से ऐसा ज्ञात हुआ कि एक सर्वनिष्ट बिन्दु पर कार्यशील दो बल **a** तथा **b** एक एकल बल **r** के तुल्य (equivalent) होते हैं जिसे **परिणामी बल (resultant force)** कहते हैं। वस्तुत: यह बल **r**, समान्तर-चतुर्भुज, जिसकी भुजायें दिष्ट रेखा-खण्डों **a** तथा **b** से प्रदर्शित होती हैं, के विकर्ण से प्रदर्शित होता है (चित्र 5.1 देखें)। यहाँ पर, हम लिखते हैं

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}+\mathbf{b} \qquad (i)$$

ध्यान रखें कि समीकरण (*i*) में प्रयुक्त धन चिन्ह जोड़ की बीजीय संक्रिया का निर्देशन नहीं करता, बल्कि, यह **बल समान्तर चतुर्भुज के नियम से (parallelogram law of forces)** **a** तथा **b** को संयुक्त करने की एक विधि है।

विस्थापन में कान्तिमान तथा दिशा दोनों होते हैं, इसलिए इसको दिष्ट रेखा खण्ड से प्रदर्शित किया जा सकता है। माना, O से A तक के विस्थापन का परवर्ती विस्थापन A से B तक है। तब दोनों विस्थापन, एक एकल विस्थापन O से B के तुल्य हैं (आकृति 5.2 देखें)। हम लिखते हैं,

$$\mathbf{OA}+\mathbf{AB}=\mathbf{OB} \qquad (ii)$$



आकृति 5.2

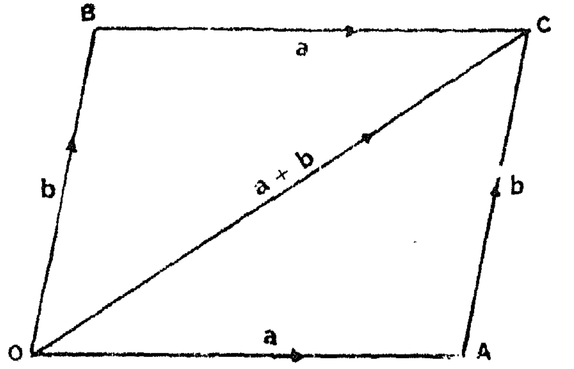
वह नियम, जो **OA** तथा **AB** को संयुक्त करके **OB** के तुल्य बनाता है, **संयोजन त्रिभुज-नियम (triangle law of composition)** अथवा, **संकलन-त्रिभुज नियम (triangle law of addition)** कहलाता है। यह चित्र 5.2 में प्रदर्शित है। यह भी ध्यान रखें कि, धन-चिन्ह, बीजीय योग से दूसरे अर्थ में प्रयुक्त हुआ है। यहाँ, धन चिन्ह का तात्पर्य **OA** तथा **AB** राशियों को संयोजन त्रिभुज नियम से संयुक्त करना है।

अब, हम देखेंगे कि त्रिभुज नियम तथा समान्तर चतुर्भुज नियम दोनों एक दूसरे के तुल्य हैं।

हम जानते हैं कि यदि, **a** तथा **b** क्रमश: **OA** तथा **OB** से प्रदर्शित हो तो, समान्तर चतुर्भुज नियम से,

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{OC},$$

जहां **OC**, समान्तर चतुर्भुज OACB का विकर्ण है (आकृति 5·3 देखें)।



आकृति 5.3

पुन: त्रिभुज नियम से,

$$\mathbf{OA} + \mathbf{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{AC} = \mathbf{OC}$$

परन्तु, $\mathbf{AC} = \mathbf{OB} = \mathbf{b}$ (दो दिष्ट रेखा खण्डों की समानता से)*

इसलिए $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{OC}$.

उपरोक्त वर्णन से, हम देखते हैं कि, कुछ भौतिक राशियां कान्तिमान तथा दिशा से अभिव्यक्त होती हैं और किसी विशिष्ट नियम (त्रिभुज या समान्तर चतुर्भुज नियम**) से संयुक्त होती हैं। ये भौतिक राशियां **सदिश (vector)** के नाम से जानी जाती हैं। इस प्रकार बल तथा विस्थापन सदिश के उदाहरण हैं।

परिभाषा 5.1.1 : वे राशियां, जो कान्तिमान तथा दिशा दोनों रखने के अतिरिक्त निम्नांकित गुण धर्मों का अनुसरण करती हैं, **सदिश** कहलाती हैं :

(*i*) वे त्रिभुज-नियम या समान्तर चतुर्भुज-नियम से संयुक्त होती हैं।

(*ii*) एक राशि को धनात्मक वास्तविक संख्या से गुणा करने का तात्पर्य यह है कि उस राशि के कान्तिमान को उस संख्या से गुणा किया गया है जबकि, उसकी दिशा अपरिवर्तित रहती है।

राशि को ऋणात्मक वास्तविक संख्या से गुणा करने पर, राशि के कान्तिमान में संख्या के निरपेक्ष मान से गुणा हो जाता है और उसकी दिशा उत्क्रमित (reversed) हो जाती है।

---

* दो दिष्ट रेखा-खंड एक-दूसरे के तभी बराबर होते हैं, जब वे समान लम्बाई के हों और एक ही दिशा में हों।

** **सदिशों का त्रिभुज-नियम इस प्रकार है** : यदि दो सदिशों को कांतिमान तथा दिशा में किसी त्रिभुज की एक क्रम में ली हुई दो भुजाओं से प्रदर्शित किया जाय तो उनका **योग (या परिणामी सदिश)** कांतिमान और दिशा में त्रिभुज की विपरीत क्रम में ली हुयी तीसरी भुजा से प्रदर्शित होता है।

सदिशों का समान्तर चतुर्भुज नियम इस प्रकार है : यदि दो सदिशों को कांतिमान और दिशा में समांतर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाओं से प्रदर्शित किया जाय तो उनका **योग (या परिणामी)** कांतिमान और दिशा में समान्तर चतुर्भुज के उस विकर्ण से प्रदर्शित किया जाता है जिसका प्रारम्भिक बिन्दु दोनों भुजाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु है।

(*iii*) राशि को धनात्मक संख्या शून्य से गुणा करने पर, राशि का कान्तिमान शून्य हो जाता है और उसकी दिशा स्वेच्छ होती है।

यदि, **a** कोई सदिश हो तथा x कोई वास्तविक संख्या हो तो परिभाषा 5.1.1 के भाग (*ii*) तथा (*iii*) से,

(1) $0\mathbf{a}=\mathbf{0}$, जहां **0** एक सदिश है, जिसका कांतिमान शून्य तथा दिशा स्वेच्छ है और **शून्य सदिश (zero vector)** कहलाता है।

(2) यदि, $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ तथा $x>0$, तब $x\mathbf{a}=|x|\ \mathbf{a}$ और $x\mathbf{a}$ की दिशा वही है जो **a** की है।

(3) यदि, $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, तथा $x<0$ तब $x\mathbf{a}=-|x|\mathbf{a}=|x|(-1)\ \mathbf{a}=|x|(-\mathbf{a})$ जहाँ पर, $-\mathbf{a}$ एक ऐसा सदिश है जिसका कान्तिमान **a** के कांतिमान के समान है परन्तु उसकी दिशा **a** के विपरीत है।

(4) यदि, $\mathbf{a}=0$ या, $x=0$ (या दोनों) तब, $x\mathbf{a}=\mathbf{0}$

विस्थापन, बल, रेखिक वेग, कोणीय वेग, वैद्युत-तीव्रता, चुम्बकीय-तीव्रता, संवेग इत्यादि सदिशों के कुछ उदाहरण हैं।

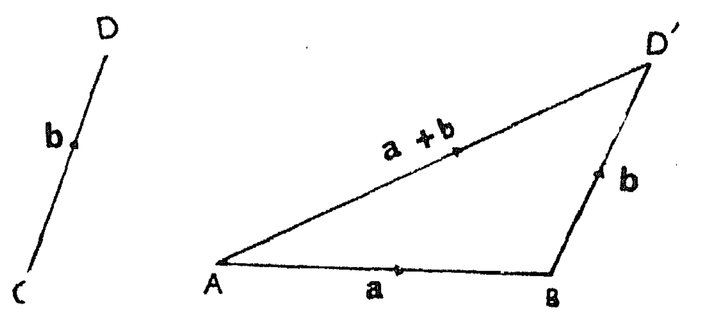
ध्यान रखें कि कुछ ऐसी भौतिक राशियां हैं, जिनका कांतिमान और दिशा तो होती है परन्तु वे समान्तर चतुर्भुज के नियमानुसार संयुक्त नहीं होती। उदाहरणार्थ, दृढ़ पिण्ड (rigid body) के परिमित घूर्णन (finite rotations), कान्तिमान और दिशा दोनों रखते हैं परन्तु वे समान्तर चतुर्भुज के नियमानुसार संयुक्त नहीं होते (इसका प्रमाण इस पाठ्य पुस्तक के सीमान्तर्गत नहीं है)।

वे राशियाँ, जिनका कान्तिमान तो होता है परन्तु कोई दिशा नहीं होती, **अदिश (Scalars)** कहलाती हैं। समय, मात्रा, तापमान, आयतन, कार्य, विभव, ऊर्जा, शक्ति, वैद्युत-प्रतिरोधकता, इत्यादि कुछ अदिशों के उदाहरण हैं।

एक अदिश को व्यक्त करने के लिए दो चीजें आवश्यक हैं :

(*i*) एक **मात्रक (unit)**, जिसमें यह नापा जाता है, और

(*ii*) एक वास्तविक संख्या



आकृति 5.4

माना, हमें दिष्ट रेखाखण्डों **AB** तथा **CD** से प्रदर्शित दो सदिशों **a** तथा **b** को जोड़ना है। इन सदिशों को जोड़ने के लिये हम एक दिष्ट रेखाखण्ड **BD′** खींचते हैं, जिसका प्रारम्भिक बिन्दु **B** है और **CD**

जो **b** को निरूपित करता है के समान एवं समान्तर है। इसलिये सदिशों के योग के त्रिभुज नियम से हम **a**+**b** को रेखाखण्ड **AD′** से प्रदर्शित करते हैं (तथा इसके परिणामस्वरूप किसी भी समान और समान्तर रेखा खण्ड से)।

अदिश-योग तथा गुणन के गुण-धर्म

यदि, **a**, **b**, **c**, तीन सदिश तथा x, y, z, तीन वास्तविक संख्यायें हों तो,

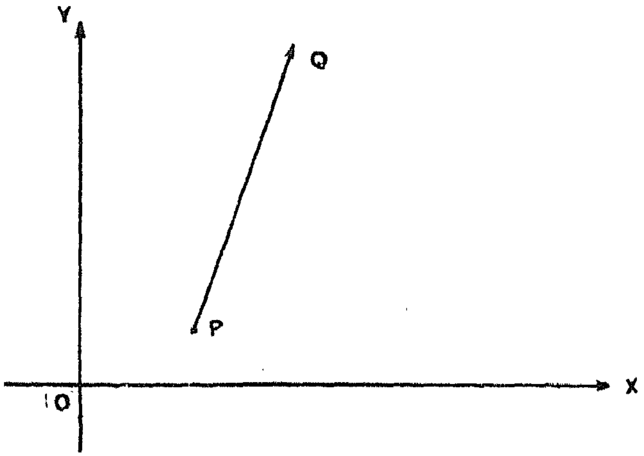
(*i*) $x\,(\mathbf{a}+\mathbf{b})=x\,\mathbf{a}+x\mathbf{b}$

(*ii*) $(x+y)\,\mathbf{a}=x\,\mathbf{a}+y\mathbf{a}$

(*iii*) $(xy)\,\mathbf{a}=x(y\mathbf{a})$

(*iv*) $1\mathbf{a}\;=\mathbf{a}$

बिन्दु P से बिन्दु Q तक के सदिश को **PQ** से प्रदर्शित किया जाता है (आकृति 5.5 देखें)। बिन्दु P को **प्रारंभिक बिन्दु** तथा बिन्दु Q को **अन्तिम बिन्दु** कहते हैं।



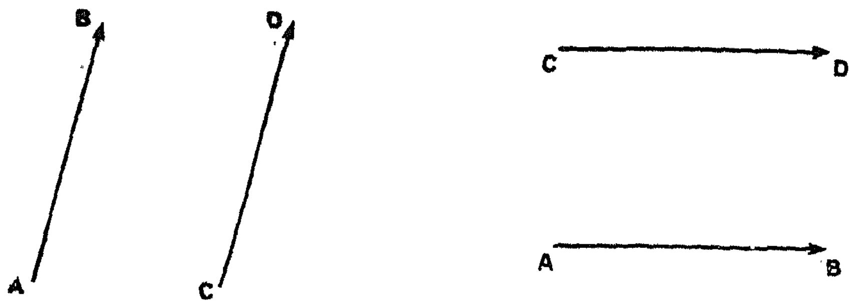
आकृति 5.5

इस सदिश की लम्बाई या कान्तिमान PQ होती है और इसकी दिशा बाण से सूचित P से Q होती है। प्रारम्भिक तथा अन्तिम बिन्दुओं P तथा Q के विनिमेय से हमें, एक दूसरा सदिश **QP** प्राप्त होता है जिसकी लम्बाई PQ के बराबर होती है परन्तु दिशा विपरीत होती है, सदिश **QP** को —**PQ** लिखा जाता है। अर्थात् **PQ**= —**PQ**

शून्य सदिश एक ऐसे रेखाखण्ड से प्रदर्शित होता है जिसके प्रारम्भिक तथा अन्तिम बिन्दु एक ही हों जैसे **PP**, **AA** इत्यादि।

परिभाषा 5.1.2 : सदिश **OP** को O के सापेक्ष P का **स्थिति सदिश (position vector)** कहते हैं।

एक सदिश में कान्तिमान तथा दिशा तो होती है परन्तु कोई स्थिर स्थिति नहीं होती। उदाहरण-स्वरूप, सभी समान्तर एवं समान दिष्ट रेखा खण्ड जैसे **AB**, **CD** इत्यादि एक ही सदिश प्रदर्शित करते हैं (आकृति 5.6 देखें)।

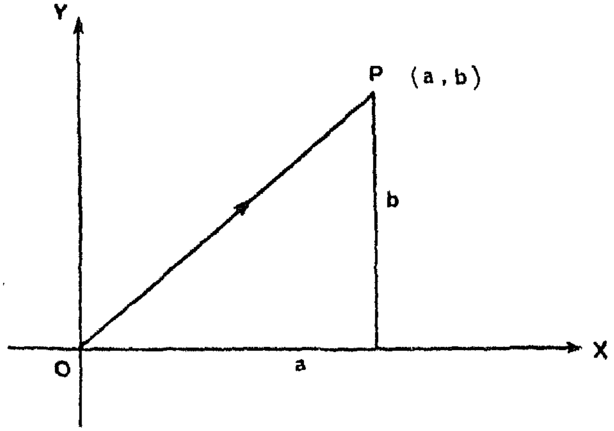


आकृति 5.6

सदिशों के इस संवर्ग का कोई भी प्रतिनिधि **मुक्त सदिश (free vector)** कहलाता है। यदि, ऐसे सदिश का प्रारम्भिक बिन्दु ज्ञात हो तो इसे **स्थानगत सदिश (localised vector)** कहा जाता है। ध्यान रखें कि, एक बल पूर्णतया तभी ज्ञात होता है जबकि उसका कान्तिमान, दिशा तथा अनुप्रयोग बिन्दु ज्ञात हो। इस प्रकार, बल एक स्थानगत-सदिश है। दृढ़तापूर्वक कहा जा सकता है कि, यही केवल उस सम्पूर्ण संवर्ग का एकल प्रतिनिधि है। दो सदिशों के योग के लिए, हम अपनी सुविधानुसार इन प्रतिनिधियों में से किसी को चुन सकते हैं।

अब, हम सदिशों को ज्यामितीय ढंग से प्रदर्शित करने में सक्षम हैं। ये ज्यामितीय अभिव्यक्तियां, सदिशों के सिद्धान्त प्रतिपादन के लिए, पर्याप्त हैं। सदिशों को एक अन्य प्रदर्शन से भी व्यक्त किया जा सकता है, जो विश्लेषात्मक प्रदर्शन के नाम से जाना जाता है। इसका उल्लेख निम्नांकित है :

हम, क्रमित युग्म (a, b), जहाँ a तथा b वास्तविक संख्यायें हैं, से पूर्व परिचित हैं। यह क्रमित युग्म, मूल बिन्दु O के सन्दर्भ में एक निश्चित बिन्दु **P** को प्रदर्शित करता है (आकृति 5.7)।



आकृति 5.7

संख्याओं का यह क्रमित युग्म, दिये हुए अक्ष समूह के सन्दर्भ में, **OP** प्रतिनिधि वाले सदिश का कांतिमान एवं दिशा, अद्वितीय ढंग से, व्यक्त करता है। विलोमतः प्रत्येक सदिश, मूल बिन्दु से गुजरने वाले रेखा खंड के रूप में अपना एक प्रतिनिधि रखता है। अन्तिम बिन्दु के निर्देशांक, क्रमित युग्म का ज्ञान कराते हैं। इस प्रकार, एक समतल में, हम, सदिश समुच्चय को वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्मों के समुच्चय अर्थात् बिंदुओं से प्रदर्शित करेंगे।

परिभाषा 5.1.3 : रेखाखंड AB की लम्बाई को सदिश **AB** का **कान्तिमान** या **मापांक** कहते हैं और उसको $|\mathbf{AB}|$ या प्रायः AB से प्रदर्शित करते हैं।

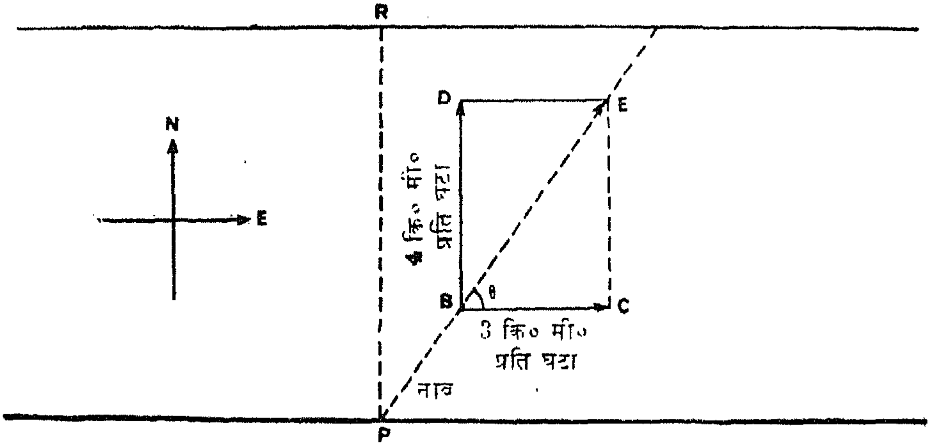
ध्यान रखें कि, **एक सदिश का कांतिमान कभी भी ऋणात्मक नहीं होता।** विशिष्ट रूप से, $|\mathbf{AB}| = |-\mathbf{AB}|$. शून्य सदिश का कान्तिमान शून्य होता है।

वह सदिश, जिसका कान्तिमान 1 है, **मात्रक सदिश (unit vector)** कहलाता है। मात्रक सदिश, जिसकी दिशा वही है जो $\mathbf{a}$ की है, को $\hat{\mathbf{a}}$ से प्रदर्शित किया जाता है।

5.2 सदिशों का योग (Addition of Vectors)

माना, एक नाव B, एक नदी में, उत्तर की तरफ जा रही है। नदी की चौड़ाई $\frac{1}{2}$ कि० मी० है और उसके तट सीधे और समान्तर हैं। माना, नाव पानी के सापेक्ष 4 कि० मी० घण्टे की नियत चाल से पानी के बहाव के लम्बवत् सीधी रेखा में चलती है। यदि, नदी पूर्व दिशा में 3 कि० मी० घण्टे की नियत चाल से बहती हो तो नाव का परिणामी वेग (जमीन के सापेक्ष सम्पूर्ण-वेग) क्या होगा ?

ध्यान रखें कि, चाल से हमारा तात्पर्य वेग के कान्तिमान से है। उपरोक्त वर्णित स्थिति को आकृति 5.8 में प्रदर्शित है।



आकृति 5.8

चूँकि वेग एक सदिश है, इसलिए, परिणामी सदिश को समानान्तर चतुर्भुज BCED (यहाँ पर आयत) के विकर्ण BE से प्रदर्शित किया जाता है। यहाँ पर,

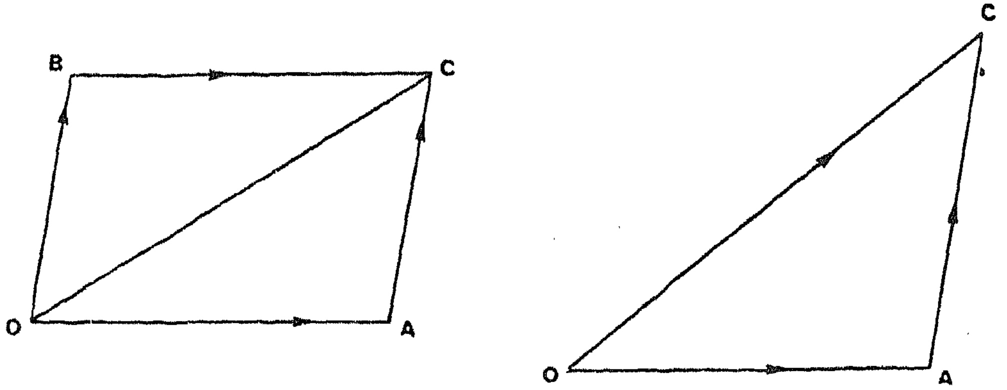
$$|\mathbf{BE}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5.0 \text{ कि॰ मी॰/घं॰}$$

BE की दिशा पूर्वोत्तर है जहां पर, $\sin \theta = \frac{4}{5}$ तथा $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ इसकी सहायता से, सदिशों के योग के लिए, हम निम्नांकित परिभाषा दे रहे हैं :

परिभाषा 5.2.1 : माना, **OA** तथा **AB** दो सदिश हैं। इनका योग **OA**+**AB** से व्यक्त किया जाता है, जो **OB** के बराबर है।

यदि, समानान्तर चतुर्भुज OACB [आकृति 5.9 (*a*) देखें] की दो भुजाओं को प्रदर्शित करने वाले सदिश **OA** (=**a**) तथा **OB** (=**b**), हों तो समान्तर चतुर्भुज नियम से,

$$\mathbf{OA}+\mathbf{OB}=\mathbf{OC}$$



(*a*) (*b*)

आकृति 5.9

चूंकि, **OB**=**AC**, इसलिए, समीकरण (1) को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :

$$\mathbf{OA}+\mathbf{AC}=\mathbf{OC}$$

यह संकलन-त्रिभुज-नियम है [चित्र 5.9 (*b*) देखें]। इस प्रकार, हमने, समान्तर चतुर्भुज नियम से, त्रिभुज-नियम का निगमन किया है। इसी प्रकार, त्रिभुज नियम से समान्तर चतुर्भुज नियम का निगमन किया जा सकता है। इसी प्रकार, एक बार पुनः दोनों नियमों की तुल्यता सिद्ध होती है।

उपरोक्त परिभाषा से, हम देखते हैं कि,

$$\mathbf{AB}+\mathbf{BA}=\mathbf{AA}.$$

परन्तु परिभाषा से, **AB**= −**BA**, अत: **AA**=**0**

आकृति 5.9 (*b*) के $\triangle$OAC में, OC$\leqslant$OA+AC,

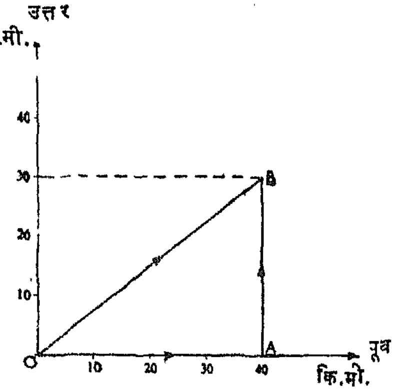
इसलिए, $|\mathbf{OA}+\mathbf{OB}| \leqslant |\mathbf{OA}| + |\mathbf{OB}|$, या,

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|,$$

अर्थात्, दो सदिशों के योग का मापांक, उनके मापांकों के योग से या तो कम होता है या बराबर होता है। बराबर का चिन्ह् तभी सत्य है जब A, O तथा C के बीच अवस्थित हो। असमिका तभी सत्य है जब कि या तो **a**=0 या **b**=0 हो।

उदाहरण 1 : एक कार, बिन्दु O से, पूर्व दिशा में 40 कि० मी० चलकर बिन्दु A पर पहुँचती है। तत्पश्चात् पुन: 30 कि० मी० उत्तर दिशा की तरफ चलकर बिन्दु B पर पहुँचती है। O से B तक की कार द्वारा तय की हुयी दिष्ट दूरी ज्ञात करो।

हल : उपरोक्त स्थिति को ज्यामितीय ढंग से आकृति 5.10 में दर्शाया गया है।



आकृति 5.10

पूर्व दिशा में, कार का विस्थापन, सदिश **OA** से प्रदर्शित है। | **OA** |, O से A तक की कार द्वारा तय की हुयी दूरी है। इसी प्रकार, कारों का उत्तर-दिशा में विस्थापन **AB** है। दोनों विस्थापनों के कान्ति-मानों का योग, | **OA** | + | **AB** | =40+30=70 कि० मी० है। चूंकि OAB एक त्रिभुज का निर्माण करता है, इसलिए परिणामी विस्थापन **OB** से प्रदर्शित होता है। अतः

$$\mathbf{OA}+\mathbf{AB}=\mathbf{OB}.$$

परन्तु, $|\mathbf{OB}| = \sqrt{|\mathbf{OA}|^2 + |\mathbf{AB}|^2} = 50$ कि० मी०

अर्थात् $|\mathbf{OB}| = \quad |\mathbf{OA}+\mathbf{AB}| = 50$ कि० मि०

इससे, यह स्पष्ट है कि, सदिशों को संयुक्त (जोड़ने) करने की विधि, वास्तविक संख्याओं के जोड़ने की साधारण विधि से बिल्कुल भिन्न है।

5·3 सदिश योग के गुण धर्म (Properties of Vector Addition) :

अब, हमें देखना है कि, संख्या बीजावली के गुण धर्म अर्थात् क्रम विनिमेयता, सहचारिता इत्यादि, सदिशों के योगफल के लिए, सत्य है कि नहीं।

माना, सदिश **a** तथा **b**, आकृति 5.11 में दिखाई गये भांति **OA** तथा **AB** से प्रदर्शित हैं।

तब, $\mathbf{OA} = \mathbf{CB} = \mathbf{a}$

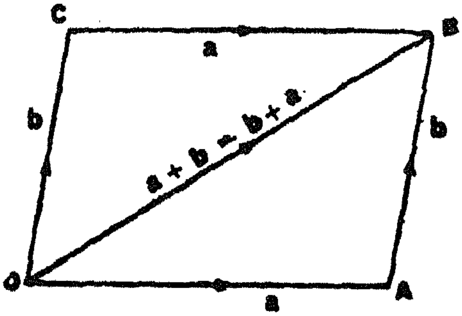
तथा, $\mathbf{AB} = \mathbf{OC} = \mathbf{b}$

अब, $\mathbf{OA} + \mathbf{AB} = \mathbf{OB}$, तथा $\mathbf{OC} + \mathbf{CB} = \mathbf{OB}$

अतः $\mathbf{OA} + \mathbf{AB} = \mathbf{OC} + \mathbf{OB}$

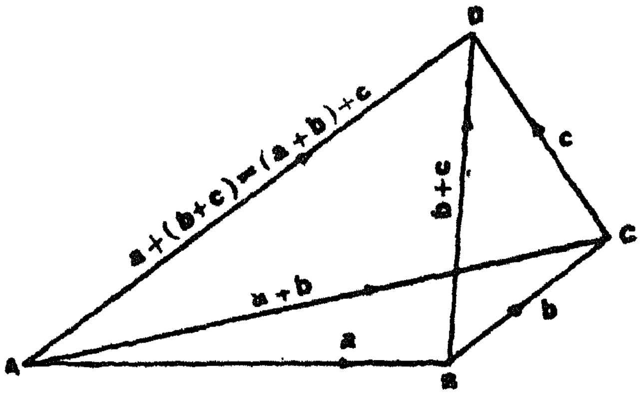
या, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

इससे स्पष्ट है कि, सदिश योगफल क्रम विनिमेय नियम का पालन करता है।



आकृति 5.11

अब आकृति 5.12 में दर्शाए गये, **AB**, **BC** तथा **CD** से प्रदर्शित तीन सदिशों **a**, **b** तथा **c** पर विचार करें।



आकृति 5·12

यहां $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AC}$

तथा, $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{BC} + \mathbf{CD} = \mathbf{BD}$

इसलिए,, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{AC} + \mathbf{c} = \mathbf{AC} + \mathbf{CD} = \mathbf{AD}$

और $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{BD} = \mathbf{AB} + \mathbf{BD} = \mathbf{AD}$

उपरोक्त दोनों समीकरणों से, हम देखते हैं कि,

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$

अर्थात् सदिश योग, साहचर्य-नियम का पालन करता है।

उपर्युक्त नियम से हम सदिश **AD** को $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ के रूप में लिखते हैं।

सदिश योग के सहचारिता के फलस्वरूप, हम देखते हैं कि,

$$\mathbf{A_1 A_2} + \mathbf{A_2 A_3} + \ldots + \mathbf{A_{n-1} A_n} = \mathbf{A_1 A_n}$$

विशिष्ट रूप से, यदि ABC एक त्रिभुज है तो,

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CA} = \mathbf{AA} = \mathbf{O}$$

इस प्रकार का परिणाम, किसी भी संवृत बहुभुज के लिए सत्य है। उदाहरणस्वरूप, संवृत बहुभुज $AA_2 \ldots A_n$ के लिए,

$$\mathbf{A_1A_2+A_2A_3+\ldots A_{n-1}A_n+A_nA_1=0}$$

सदिश-योग के दो अन्य गुण धर्म, विशेष रूप से, उल्लेखनीय हैं। वे गुण धर्म निम्नांकित हैं :

(I) किसी सदिश **a** के लिए

$$\mathbf{a+0=0+a=a}$$

इसको सिद्ध करने के लिए, माना, **a**, दिष्ट रेखाखण्ड **OP** से, निरूपित है।

चूंकि, शून्य सदिश, **0**, **OO** या **PP** इत्यादि प्रकार के सदिशों से अभिनिर्धारित किया जाता है, इसलिए,

$$\mathbf{a+0=OP+PP=OP=a}$$

तथा, $\mathbf{0+a=OO+OP=OP=a}$

अतः $\mathbf{a+0=0+a=a}$

शून्य सदिश **O** को, सदिशों का **योज्य तत्समक (additive identity)** कहते हैं।

(II) किसी सदिश **a** के लिए,

$$\mathbf{a+(-a)=(-a)+a=0}$$

इसको सिद्ध करने के लिए, माना, **a** को **OP** से निरूपित किया गया है।

तब, $\mathbf{PO = -OP = -a}$

अब, $\mathbf{a+(-a)=OP+PO=OO=0}$

तथा, $\mathbf{(-a)+a=PO+OP=PP=0}$

अतः $\mathbf{(-a)+a=a+(-a)=0}$

सदिश (**−a**) को **a** का **योज्य व्युत्क्रम** कहते हैं। इस प्रकार **a**, (**−a**) का योज्य व्युत्क्रम है।

परिभाषा : 5.3.1 यदि दो सदिशों **a** तथा **b** का योग, **c**, अर्थात् **a+b=c** हो तो सदिश **a** तथा **b** क्रमशः अपनी दिशाओं में, सदिश **c** के **घटक सदिश (component vectors)** कहलाते हैं।

अब दो दी हुई दिशाओं में, एक दिए हुए सदिश के घटक सदिशों को ज्ञात करना है।

माना, **AB** एक सदिश है और हमको दो दी हुई दिशाओं में इसके घटक सदिश ज्ञात करने हैं। इसके लिए, हम दी हुयी दिशाओं में A तथा B से होती हुई सरल रेखाएँ खींचते हैं। (आकृति 5.13 देखें)।

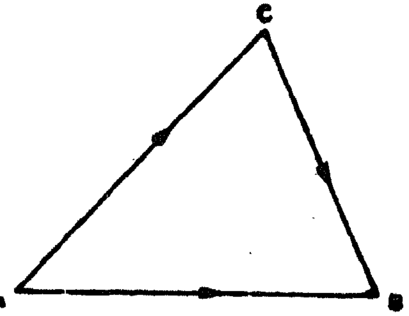
माना, रेखायें C बिन्दु पर मिलती हैं। तब,

$$\mathbf{AC+CB=AB}$$

इस प्रकार अभीष्ट घटक सदिश **AC** तथा **CB** हैं।

सदिश के घटक सदिशों को ज्ञात करने की एक दूसरी विधि का उल्लेख बाद वाले परिच्छेद में किया जायेगा।

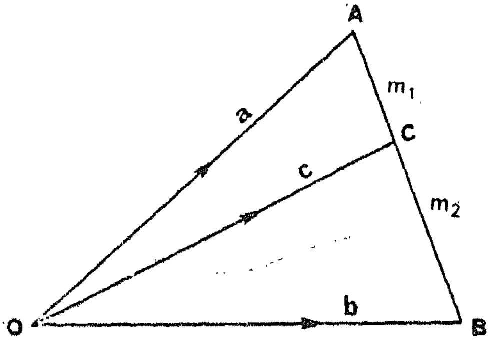
उदाहरण : 1 यदि, दो सदिश **a** तथा **b**, **OA** तथा **OB** से निरूपित किए गए हों और रेखा AB में एक बिन्दु C इस प्रकार है कि AC : CB $= m_1 : m_2$ अर्थात् m_2 AC $= m_1$ CB, तो



आकृति 5.13

$$c = OC = \frac{m_2 \ \mathbf{a} + m_1 \ \mathbf{b}}{m_2 + m_1},$$

जहाँ, m_1 तथा m_2 धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं।



आकृति 5.14

उपपत्ति : आकृति 5.14 की सहायता से,

$$\mathbf{OA} = \mathbf{OC} + \mathbf{CA}$$

इसलिए, $m_2 \ \mathbf{OA} = m_2\mathbf{OC} + m_2\mathbf{CA}$, क्योंकि, m_2, एक धनात्मक वास्तविक संख्या है। (1)

पुन : $\mathbf{OB} = \mathbf{OC} + \mathbf{CB}$

या, $m_1 \ \mathbf{OB} = m_1\mathbf{OC} + m_1\mathbf{CB}$, क्योंकि m_1, एक धनात्मक वास्तविक संख्या है। (2)

(1) तथा (2) को जोड़ने पर,

$m_2\mathbf{OA} + m_1\mathbf{OB} = (m_2 + m_1)\mathbf{OC} + m_2\mathbf{CA} + m_1\mathbf{CB}$ (3)

परन्तु $m_2 \ \mathbf{AC} = m_1 \ \mathbf{CB}$ या, $m_2 \ \mathbf{CA} + m_1 \ \mathbf{CB} = \mathbf{0}$.

अतः (3) से हम देखते हैं कि,

$m_2 \ \mathbf{OA} + m_1 \ \mathbf{OB} = (m_2 + m_1) \ \mathbf{OC}$

या, $\mathbf{c} = \mathbf{OC} = \dfrac{m_2\mathbf{OA} + m_1 \ \mathbf{OB}}{m_2 + m_1} = \dfrac{m_2 \ \mathbf{a} + m_1 \ \mathbf{b}}{m_2 + m_1}$

यदि, $m_2 = m_1$ अर्थात् यदि C, AB का मध्य बिन्दु हो तो,

$\mathbf{OA} + \mathbf{OB} = 2\mathbf{OC}$

या, $\mathbf{c} = \mathbf{OC} = \dfrac{\mathbf{OA} + \mathbf{OB}}{2} = \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$.

उदाहरण 2 : यदि,

$\mathbf{a} + 5\mathbf{b} = \mathbf{c}$ (1)

$\mathbf{a} - 7\mathbf{b} = 2\mathbf{c}$ (2)

तो सिद्ध करो कि, **a** की दिशा, **c** के समान परन्तु **b** के विपरीत है।

उपपत्ति : (1) को 7 से तथा (2) को 5 से गुणा करके दोनों परिणामी समीकरणों को जोड़ने पर, हम देखते हैं कि,

$$12\mathbf{a} = 17\mathbf{c} \quad \text{या,} \quad \mathbf{a} = \frac{17}{12}\mathbf{c}.$$

इसलिए, **a** तथा **c**, एक ही दिशा में हैं।

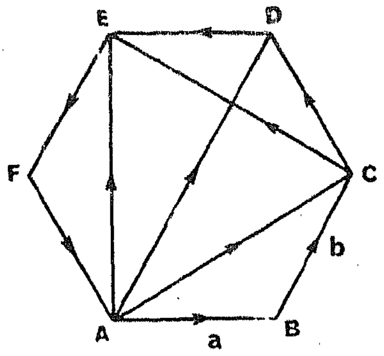
पुनः (1) को (2) से गुणा करके (2) में से घटाने पर हम देखते हैं कि,

$$\mathbf{a} + 17\mathbf{b} = 0 \text{ या } \mathbf{a} = -17\mathbf{b}\ .$$

इसलिये, **a** तथा **b** विपरीत दिशाओं में हैं।

उदाहरण 3 : यदि, समषट्भुज ABCDEF, की दो क्रमागत भुजायें **a** तथा **b** हों तो दूसरी भुजाओं से क्रम में निर्धारित सदिश कौन से हैं ? सदिशों **AC, AD, AE,** तथा **CE** को **a** तथा **b** के पदों में व्यक्त करो।

हल : माना, समषट्भुज ABCDEF की क्रमागत भुजायें AB तथा BC, सदिशों **a** तथा **b** से निरूपित की गई हैं जैसा कि आकृति 5.15 में दर्शाया गया है।



आकृति 5.15.

$$\text{तब,} \quad \mathbf{AC} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

पुनः AD, BC के समान्तर तथा इसकी लम्बाई के दुगुने के बराबर है, इसलिए,

$$\mathbf{AD} = 2\mathbf{b}$$

$$\text{अब,} \quad \mathbf{CD} = \mathbf{AD} - \mathbf{AC} = 2\mathbf{b} - (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

चूंकि, DE, BA के समान्तर एवं समान है, इसलिए,

$$\mathbf{DE} = \mathbf{BA} = -\mathbf{AB} = -\mathbf{a}.$$

इसी तरह, $\mathbf{EF} = \mathbf{CB} = -\mathbf{BC} = -\mathbf{b}.$

तथा, $\mathbf{FA} = \mathbf{DC} = -\mathbf{CD} = -(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}$

पुनः : $\mathbf{AE} = \mathbf{AD} + \mathbf{DE} = 2\mathbf{b} + (-\mathbf{a}) = 2\mathbf{b} - \mathbf{a}$

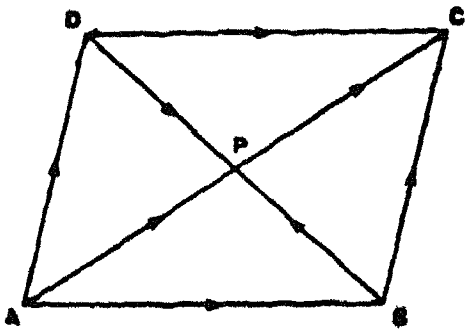
तथा, $\mathbf{CE} = \mathbf{CD} + \mathbf{DE} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + (-\mathbf{a}) = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}.$

यूक्लिडीय ज्यामिति (Euclidean Geometry) के प्रमेयों को सिद्ध करने के लिए, सदिश विधियां, प्रयुक्त हो सकती हैं। इसके कुछ उदाहरण हम नीचे दे रहे हैं।

उदाहरण 4 : दिखाओ कि, एक चतुर्भुज, समान्तर चतुर्भुज तभी होगा यदि और केवल यदि, उसके विकर्ण एक दूसरे को विभाजित करें।

उपपत्ति : (i) यदि, चतुर्भुज एक समान्तर चतुर्भुज है, तो सिद्ध करना है कि, इसके विकर्ण एक दूसरे को द्विभाजित करते हैं।

माना, ABCD, एक दिया हुआ समान्तर चतुर्भुज है, जिसके विकर्ण बिन्दु P पर, प्रतिच्छेद करते हैं (आकृति 5.16 देखें)।



आकृति 5.16

माना, $DP : PB = m_1 : m_2$ तथा $AP = m_3\, AC$, जहाँ m_1 m_2, तथा m_3 धनात्मक वास्तविक संख्यायें हैं। अभीष्ट परिणाम प्राप्त करने के लिए, हमें सिद्ध करना है कि,

$$m_1 = m_2, \qquad \text{तथा} \qquad m_3 = \tfrac{1}{2}.$$

चूँकि, P, DB में अवस्थित है, इसलिए, उदाहरण 1 की सहायता से हम देखते हैं कि,

$$\mathbf{AP} = \frac{m_2\,\mathbf{AD} + m_1 \cdot \mathbf{AB}}{m_2 + m_1} \tag{1}$$

पुन: $\mathbf{AP} = m_3\mathbf{AC} = m_3(\mathbf{AB} + \mathbf{BC}) = m_3(\mathbf{AB} + \mathbf{AD})$ (2)

(1) तथा (2) से, हम देखते हैं कि,

$$\frac{m_2\,\mathbf{AD} + m_1\;\mathbf{AB}}{m_2 + m_1} = m_3\mathbf{AB} + m_3\mathbf{AD}$$

या,
$$\left(\frac{m_2}{m_2 + m_1} - m_3\right)\mathbf{AD} + \left(\frac{m_1}{m_2 + m_1} - m_3\right)\mathbf{AB} = 0$$

परन्तु **AD** तथा **AB** समान्तर तथा शून्य सदिश नहीं हैं,

इसलिये, $\dfrac{m_2}{m_2 + m_1} - m_3 = 0$ तथा, $\dfrac{m_1}{m_2 + m_1} - m_3 = 0$

अर्थात् $m_1 = m_2$ तथा $m_3 = \frac{1}{2}$.

इससे सिद्ध होता है कि, समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण, एक दूसरे को, द्विभाजित करते हैं।

(*ii*) विलोमत: यदि, चतुर्भुज के विकर्ण, एक दूसरे को द्विभाजित करें तो,

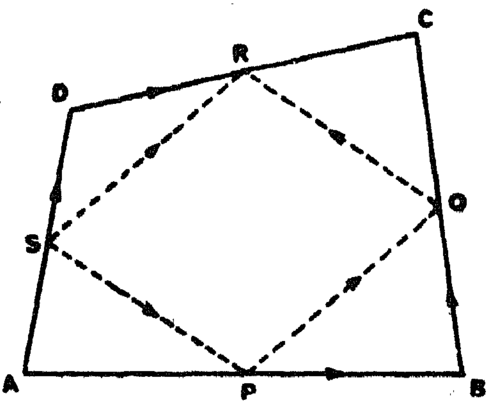
$$\mathbf{AB}=\mathbf{AP}+\mathbf{PB}=\mathbf{PC}+\mathbf{DP}=\mathbf{DC}$$

तथा, $$\mathbf{AD}=\mathbf{AP}+\mathbf{PD}=\mathbf{PC}+\mathbf{BP}=\mathbf{BC}$$

अर्थात् AB तथा DC, समान्तर एवं समान हैं। इसी प्रकार, AD तथा BC भी समान्तर तथा समान हैं। अतः ABCD, एक समान्तर चतुर्भुज है।

उदाहरण 5 : यदि, चतुर्भुज की क्रमागत भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को सरल रेखाओं से सम्बद्ध किया जाय, तो सिद्ध करो कि, परिणामी चतुर्भुज, एक समान्तर चतुर्भुज है।

उपपत्ति : माना, दिये हुए चतुर्भुज ABCD की भुजाओं के मध्य बिन्दु P, Q, R, S हैं (आकृति 5.17 देखें)।



आकृति 5.17

तब, $\mathbf{PQ}=\mathbf{PB}=\mathbf{BQ}=\frac{1}{2}\mathbf{AB}+\frac{1}{2}\mathbf{BC}=\frac{1}{2}(\mathbf{AB}+\mathbf{BC})=\frac{1}{2}\mathbf{AC}$

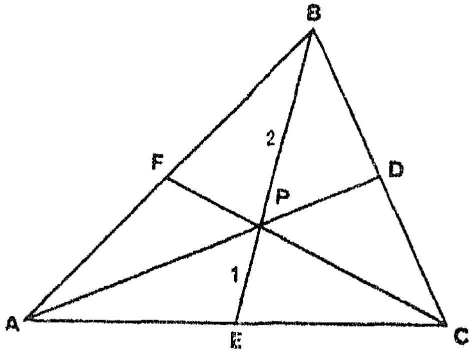
तथा, $\mathbf{SR}=\mathbf{SD}+\mathbf{DR}=\frac{1}{2}\mathbf{AD}+\frac{1}{2}\mathbf{DC}=\frac{1}{2}(\mathbf{AD}+\mathbf{DC})=\frac{1}{2}\mathbf{AC}$

इसलिए, **PQ** तथा **SR**, बराबर तथा समान्तर सदिश हैं। इसी तरह, हम सिद्ध कर सकते हैं कि, **SP** तथा **RQ** भी बराबर तथा समान्तर सदिश हैं।

उदाहरण 6 : सिद्ध करो कि, त्रिभुज की माध्यिकायें, एक बिन्दु पर मिलती हैं, जो माध्यिकाओं का समत्रिभाजक बिन्दु है।

उपपत्ति : माना A B C दिया हुआ त्रिभुज है, जिसकी दो माध्यिकाओं AD तथा BE का कटान बिन्दु P है, जैसा कि आकृति 5.18 में दर्शाया गया है।

माना A, B, C, के स्थिति सदिश, मूल बिन्दु O के सापेक्ष, **a**, **b**, **c**, हैं। चूंकि, D, F, F आकृति 5.18 में सूचित भुजाओं के मध्य बिन्दु हैं, इसलिए उदाहरण 1 की सहायता से, D, E तथा F के स्थिति सदिश क्रमशः



आकृति 5.18

$$\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2},\quad \frac{\mathbf{c}+\mathbf{a}}{2},\quad \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}\ \text{हैं।}$$

पुनः उदाहरण 1 की ही सहायता से, माध्यिका BE को 2 : 1 के अनुपात में द्विभाजित करने वाले बिन्दु P का स्थिति-सदिश,

$$\frac{2.\dfrac{\mathbf{c}+\mathbf{a}}{2}+\mathbf{b}}{3}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}+\mathbf{c}}{3}\ \text{है।}$$

इससे सिद्ध होता है कि, बिन्दु P माध्यिका BE पर अवस्थित है और उसको 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है। इसी तरह, हम सिद्ध कर सकते हैं कि, माध्यिकाओं AD तथा CF को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करने वाले बिन्दु P का स्थिति सदिश $\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$ है। अतः बिन्दु P, दूसरी दो माध्यिकाओं AD तथा CF पर भी अवस्थित है तथा उनको भी 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

प्रश्नावली 5.1

1. क्या यह कभी सम्भव है कि,

   $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$?

   यदि हाँ, तो कब सम्भव है ? यदि, नहीं, तो क्यों नहीं ?
2. यदि, $|\mathbf{a}| = 3$ तो $|5\mathbf{a}|$, $|-2\mathbf{a}|$, तथा $|0\mathbf{a}|$ के मान क्या होंगे ?
3. यदि, **a**, एक अशून्य सदिश है तो एक अदिश k ऐसा ज्ञात करो कि,

   $|k\,a| = 1.$

4. यदि, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, तो क्या $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ सर्वदा सत्य है ?

5. यदि, $\mathbf{a}=\mathbf{b}$, तो क्या $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, सत्य है ?

6. सिद्ध करो कि, $|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$

7. A B C D, एक समान्तर चतुर्भुज है। यदि $\mathbf{AB}=\mathbf{a}$, तथा $\mathbf{BC}=\mathbf{b}$ हो तो सिद्ध करो कि, $\mathbf{AC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ तथा $\mathbf{BD}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$.

8. यदि, $\mathbf{AO}+\mathbf{OB}=\mathbf{BO}+\mathbf{OC}$, तो सिद्ध करो कि, A, B, तथा C, संरेख है।

9. माना, चार सुव्यक्त बिन्दुओं P,Q,R,S, के स्थिति सदिश **a**, **b**, **c**, **d**, हैं, यदि, $\mathbf{b}-\mathbf{a}=\mathbf{c}-\mathbf{d}$, तो सिद्ध करो कि PQRS, एक समान्तर चतुर्भुज है।

10. माना, **a**, **b**, **c**, स्थिति सदिश है। यदि, तीन संख्यायें α, β, γ (सभी शून्य नहीं हैं,) इस प्रकार हों कि, $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}=\mathbf{0}$, तथा $\alpha+\beta+\gamma=0$. तो दिखाओ कि, **a**, **b** तथा **c** के सिरे एक रेखा में हैं।

11. सिद्ध करो कि, एक अष्टभुज के केन्द्र से शीर्षों तक खींचे गये सभी सदिशों का योगफल एक शून्य सदिश है।

12. दिखाओ कि, समान्तर चतुर्भुज के किसी शीर्ष तथा विपरीत भुजा के मध्य बिन्दु को जोड़ने वाली रेखा, विपरीत विकर्ण को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करती है।

13. संबंध, $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$, की ज्यामितीय सार्थकता क्या है ?

14. निम्नांकित दशाओं में, सदिश $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ का कान्तिमान और दिशा ज्ञात करो :

    (*i*) **a** का कान्तिमान 5, तथा दिशा, उत्तर पूर्व; *b* का कान्तिमान 5 और दिशा, उत्तर पश्चिम,

    (*ii*) **a** का कान्तिमान 3 तथा दिशा पूर्व; **b** का कान्तिमान 7, तथा दिशा पश्चिम।

15. 30 न्यूटन तथा 40 न्यूटन के दो बल F_1 तथा F_2, एक कण P पर क्रियाशील हैं। F_1 तथा F_2 एक दूसरे के लम्बवत दिशा में हैं। वह बल ज्ञात करो, जो P को गतिशील होने से रोक सके।

16. हवा, दक्षिण दिशा में 3 मी०/सैकण्ड की रफ्तार से बह रही है। एक कार को पूर्व दिशा में कितने तेज रफ्तार से चलना चाहिए कि हवा का, कार के सापेक्ष रफ्तार 5 मी०/से० हो जाय ?

17. सदिश **a** के घटक सदिशों के मापांक ज्ञात करो जो **a** से 40° तथा 50° पर झुके हुए हैं।

18. ABCD, एक चतुर्भुज है और O, इसके समतल में कोई बिन्दु है। यदि, $\mathbf{OA}+\mathbf{OB}+\mathbf{OC}+\mathbf{OD}=0$, तो दिखाओ कि, O, ABCD के विपरीत भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाने वाली रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु है।

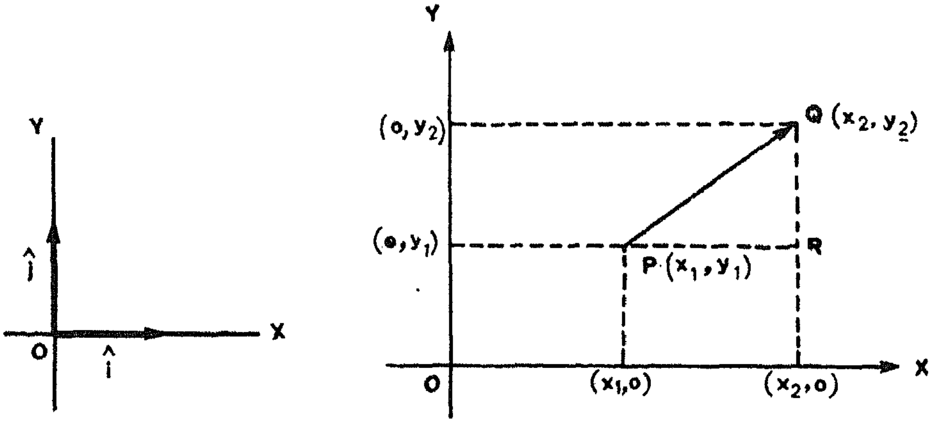
19. ABC, एक त्रिभुज है तथा P,BC में कोई बिन्दु है। यदि, **AP**, **PB**, **PC** का योग **PQ** हो, तो सिद्ध करो कि, ABQC, एक समान्तर चतुर्भुज है और इस प्रकार Q एक नियत बिन्दु है।

20. यदि एक चतुर्भुज की क्रमागत भुजायें सदिश **a**, **b**, **c**, **d** से निरूपित की जाय तो सिद्ध करो कि, दिये हुए चतुर्भुज के समान्तर होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रति $\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$, या $\mathbf{b}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$, है।

21. यदि, दो मात्रक सदिशों का योग भी मात्रक सदिश हो तो दिखाओ कि, उनके अन्तर का कान्तिमान $\sqrt{3}$ होगा।

5.4 सदिश के घटक (Components of a Vector)

माना, निर्देशांक समतल XOY है तथा X और Y अक्षों के अनु, मात्रक सदिश $\hat{\mathbf{i}}$ तथा $\hat{\mathbf{j}}$ है। [आकृति 5.19 (*a*) तथा 5.19 (*b*) देखें]।



(a) (b)

आकृति 5·19

माना, XOY, समतल में, **PQ** एक सदिश है जिसका प्रारम्भिक बिन्दु P (x_1, y_1) तथा अन्तिम बिन्दु Q $(x_2; y_2)$ है तब,

$$\mathbf{PQ}=\mathbf{PR}+\mathbf{RQ} \qquad (1)$$

चूंकि, $\hat{\mathbf{i}}$, x-अक्ष के अनु, मात्रक सदिश है तथा $PR=(x_2-x_1)$,

$$\therefore \qquad \mathbf{PR}=(x_2-x_1)\ \hat{\mathbf{i}} \qquad (2)$$

इसी तरह, $\mathbf{PQ}=(y_2-y_1)\ \hat{\mathbf{j}} \qquad (3)$

(1), (2) तथा (3) से, हम देखते हैं कि;

$$\mathbf{PQ}=(x_2-x_1)\ \hat{\mathbf{i}}+(y_2-y_1)\ \hat{\mathbf{j}} \qquad (4)$$

(x_2-x_1) तथा (y_2-y_1), सदिश **PQ** के क्रमशः x-अक्ष तथा, y-अक्ष के अनु, घटक कहलाते हैं।

$(x_2-x_1)\,\hat{\mathbf{i}}$ तथा $(y_2-y_1)\,\hat{\mathbf{j}}$ सदिश **PQ** के घटक सदिश कहलाते हैं।

PQ का कांतिमान, पैथागोरस के प्रमेय (Pythagorean Theorem) से निर्धारित किया जा सकता है। हम देखते हैं कि,

$$|\mathbf{PQ}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

इस प्रकार, यदि, $\mathbf{a} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}}$, तो $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2}$

उदाहरण 1 : $P=(2, 3)$ तथा $Q=(5, 7)$ के लिए, सदिश $\mathbf{a} = \mathbf{PQ}$ को मात्रक सदिशों $\hat{\mathbf{i}}$ तथा $\hat{\mathbf{j}}$ में व्यक्त करो। a का कांतिमान ज्ञात करो।

हल : समीकरण (4) की सहायता से, $x_1=2$, $x_2=5$, $y_1=3$, तथा $y_2=7$, के लिए हम देखते हैं कि,

$$\mathbf{a} = (5-2)\,\hat{\mathbf{i}} + (7-3)\,\hat{\mathbf{j}} = 3\hat{\mathbf{i}}+4\hat{\mathbf{j}},$$

तथा **a** का कान्तिमान

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \text{ है।}$$

सदिश **PQ** के निरूपण (1) के सन्दर्भ में, निम्नांकित प्रमेय सिद्ध किया जा सकता है।

प्रमेय : 5.4.1 दो सदिश **a** तथा **b** तभी बराबर होंगे जबकि x तथा y-अक्षों के अनु, उनके घटक बराबर हों।

उपपत्ति: इसको सिद्ध करने के लिए, माना, $\mathbf{a} = a_1\hat{\mathbf{i}}+a_2\hat{\mathbf{j}}$, तथा $\mathbf{b} = b_1\hat{\mathbf{i}}+b_2\hat{\mathbf{j}}$, तब,

$$\mathbf{a}=\mathbf{b}, \text{ यदि, और केवल यदि, } a_1\hat{\mathbf{i}}+a_2\hat{\mathbf{j}}=b_1\hat{\mathbf{i}}+b_2\hat{\mathbf{j}},$$

या, $\quad (a_1-b_1)\,\hat{\mathbf{i}}=(b_2-a_2)\,\hat{\mathbf{j}}.$

ध्यान रखें कि, दोनों पक्षों के सदिश बराबर नहीं हो सकते क्योंकि वे समान्तर नही ह। अतः उनमें से प्रत्येक शून्य के बराबर होना चाहिए।

अर्थात् $\quad (a_1-b_1)\,\hat{\mathbf{i}}=\mathbf{0}=(b_2-a_2)\,\hat{\mathbf{j}}$

या, $\quad a_1-b_1=0,\quad$ तथा $\quad b_2-a_2=0,$

या, $\quad a_1=b_1\quad$ तथा $\quad a_2=b_2.$

दिक्कोज्या (Direction cosines)

सदिश **OP** की दिक्कोज्या, उन कोणों की कोटिज्या (cosine) से परिभाषित होती है, जो सदिश, क्रमशः x तथा y-अक्ष की धनात्मक दिशाओं के साथ बनाता है। इस प्रकार, यदि सदिश **OP**, x-अक्ष के साथ θ कोण बनाता है तो यह y-अक्ष से $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ कोण बनायेंगे। इन कोणों की कोटिज्या क्रमशः $\cos\theta$ तथा $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ है।

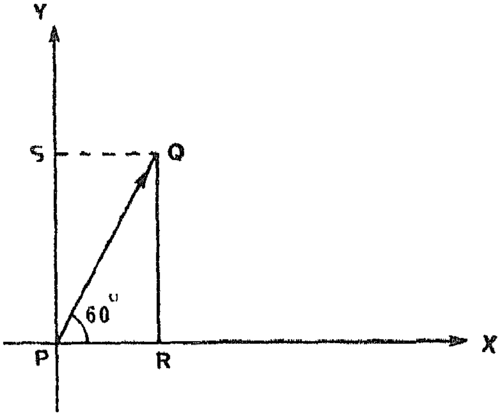
यदि, OP की दिक्कोज्या $\cos\alpha$ तथा $\cos\beta$ हों तो x तथा y-अक्ष के अनु, **OP** $\cos\alpha$ तथा **OP** $\cos\beta$ होंगे। इस प्रकार,

$$OP^2 = OP^2 \cos^2\alpha + OP^2 \cos^2\beta.$$

अत: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$

उदाहरण 2 : माना, **PQ** एक सदिश है, जिसका कांतिमान 10 है तथा वह x-अक्ष से 60° का कोण बनाता है। x तथा y-अक्ष के अनु, **PQ** के घटक ज्ञात करो।

हल : एक सदिश को इस प्रकार से स्थानान्तरित किया जाता है कि, उसका प्रारम्भिक बिन्दु, मूल बिन्दु के संपाती हो। इस प्रकार, P को मूल बिन्दु लिया जा सकता है।



आकृति 5.20

आकृति 5.20 की सहायता से, हम देखते हैं कि,

$$PR = PQ \cos 60^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$$

$$PS = PQ \cos 30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}.$$

अत: x अक्ष तथा y-अक्ष के अनु, PQ के घटक क्रमश: 5 तथा $5\sqrt{3}$ हैं।

उदाहरण 3 : यदि सदिश **PQ** का प्रारम्भिक बिन्दु P (2, 3) तथा x-अक्ष और y-अक्ष के अनु, उसके घटक क्रमश: 1 तथा 2 हों तो उसके अन्तिम बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करो।

हल : माना, अन्तिम बिन्दु Q के निर्देशांक (x, y) हैं। तब, सदिश PQ के x-अक्ष तथा y-अक्ष के अनु, घटक क्रमश: $(x-2)$, तथा $(y-3)$ होंगे। इसलिए $x-2=1$, या $x=3$,

तथा $y-3=2$, या $y=5$, (दी हुई शर्तों की सहायता से)।

अत: अन्तिम बिन्दु Q (3, 5) है।

प्रश्नावली 5.2

1. माना, **a** एक सदिश है, जिसका प्रारम्भिक बिन्दु P (x_1, y_1) तथा अन्तिम-बिन्दु Q (x_2, y_2) है। (*i*) से (*v*) तक के प्रत्येक प्रश्नों में *x*-अक्ष तथा *y*-अक्ष के अनु, सदिश का कांतिमान एवं घटक ज्ञात करो।

   (*i*) P (2, 3) ; Q (4, 6)
   (*ii*) P (—1, 3) ; Q (1, 2)
   (*iii*) P (0, 2) ; Q (5, —3)
   (*iv*) P (—1, —2) ; Q (—5, —6)
   (*v*) P (2, 4) ; Q (—5, —3)

2. (*i*) से (*v*) तक प्रत्येक के प्रश्नों में सदिश **PQ** का अन्तिम बिन्दु तथा दिक्कोज्या ज्ञात, करो जिसका प्रारम्भिक बिन्दु P, तथा क्रमशः *x* तथा *y*-अक्ष के अनु, घटक a_1, a_2 निम्नांकित हैं :

   (*i*) $a_1=-2, a_2=3$, P (1, 2)
   (*ii*) $a_1=2$, $a_2=5$, P (2, 3)
   (*iii*) $a_1=5, a_2=-4$, P (—1, 2)
   (*iv*) $a_1=0$, $a_2=2$, P (1, 3)
   (*v*) $a_1=5$, $a_2=0$, P (—1, —3)

3. (*i*) से (*v*) तक के प्रत्येक प्रश्नों में, सदिश **PQ** के *x*-अक्ष तथा *y*-अक्ष के अनु, घटक ज्ञात करो, जिसका कांतिमान M तथा उसके द्वारा *x*-अक्ष से बनने वाला कोण θ निम्नांकित है :

   (*i*) $M=15$, $\theta=30°$
   (*ii*) $M=10$, $\theta=120°$
   (*iii*) $M=3$, $\theta=210°$
   (*iv*) $M=5$, $\theta=0°$
   (*v*) $M=7$, $\theta=90°$

4. माना, **a**, **b** तथा **c**, तीन सदिश हैं जिनके घटक (3, 4), (—2, 5), तथा (1, 3) हैं। यहाँ, पहली प्रविष्टि, *x*-अक्ष के अनु, तथा दूसरी प्रविष्टि, *y*-अक्ष के अनु, घटक है। निम्नांकित के मान बताओ :

   (*i*) **a+b** (*ii*) **b+a** (*iii*) **c+a** (*iv*) **a—b**
   (*v*) **b—a** (*vi*) **c—a** (*vii*) **a—b—c**
   (*viii*) **a+b+c**

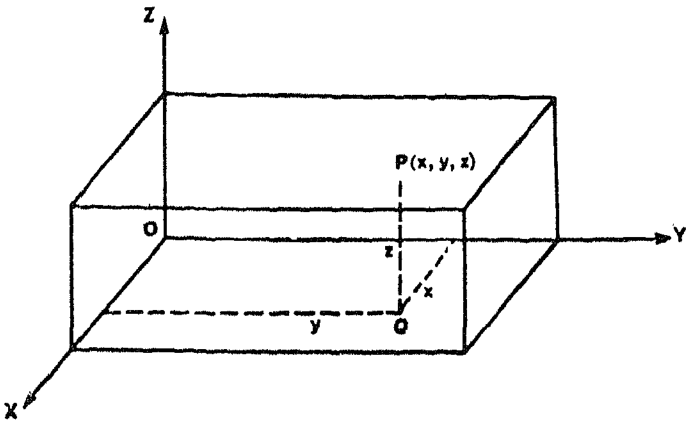
5. दिखाओ कि, सदिश $\mathbf{a}=2\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}$ तथा $\mathbf{b}=4\hat{\mathbf{i}}+6\hat{\mathbf{j}}$, एक दूसरे के समान्तर हैं।

5.5 त्रिविमीय आयताकार निर्देशांक पद्धति (Three Dimensional Rectangular Coordinate System)

हम जानते हैं कि, एक समतल में, प्रत्येक बिन्दु, दो लम्बवत् अक्षों के सन्दर्भ में, जिनको x तथा y-अक्ष कहते हैं, वास्तविक संख्याओं के एक क्रमित युग्म से निरूपित किया जा सकता है। यदि, एक बिन्दु P को समतल में क्रमित युग्म (x, y) से निरूपित किया जाय तो x, बिन्दु P से y-अक्ष तक लम्बवत् दूरी होती है। युग्म (x, y) में, x तथा y, बिन्दु P के निर्देशाँक कहलाते हैं।

अन्तरिक्ष में भी बिन्दुओं को ठीक वैसे ही व्यक्त किया जा सकता है जैसे कि एक समतल में। माना, एक समतल में, x तथा y-अक्ष, बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। इस समतल में हम साधारण द्वि-विमीय निर्देशांक पद्धति, प्रयुक्त करते हैं। माना, बिन्दु O पर, ZOZ′, $x—y$ समतल के लम्बवत् ऊपर और नीचे दोनों तरफ विस्तृत की जाती है। तब, OX, OY तथा OZ तीनों रेखाएँ परस्पर लम्बवत् हैं। हम, OZ पर दूरियों को धनात्मक तथा OZ′ पर, ऋणात्मक होते हैं। तब, अन्तरिक्ष में कोई भी बिन्दु, तीन निर्देशांक अक्षों के सन्दर्भ में अद्वितीय ढंग से नियत किया जा सकता है।

अब, इन तीन लम्बवत् अक्षों के सन्दर्भ में, किसी बिन्दु P को अन्तरिक्ष में निर्धारित करने के लिए, हम बिन्दु P से $x—y$ के समतल लम्बवत् PQ खींचते हैं (आकृति 5.21 देखें)।



आकृति 5.21

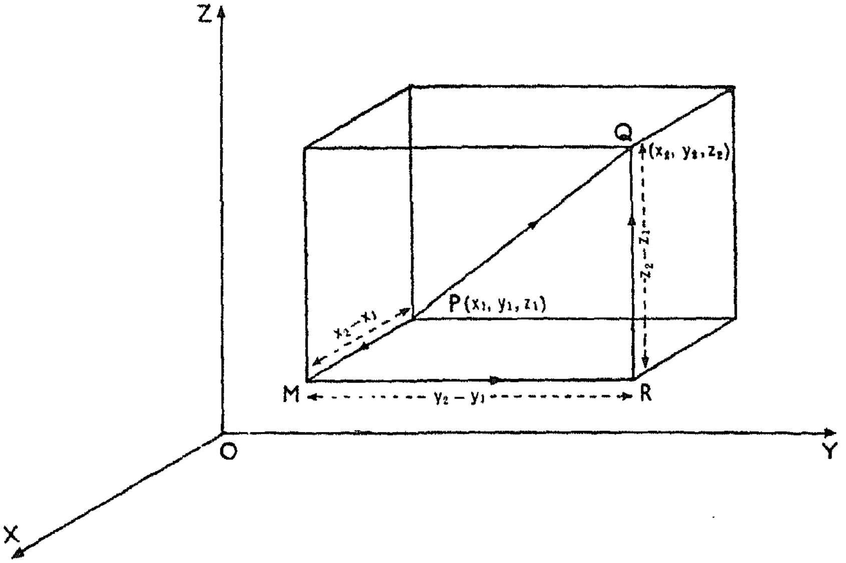
यदि, लम्ब, x तथा y-अक्ष को अन्तर्विष्ट करने वाले समतल से बिन्दु Q पर मिले तो, बिन्दु Q से y-अक्ष की लम्बवत् दूरी को P का x-निर्देशांक तथा बिन्दु Q से x-अक्ष की लम्बवत् दूरी को P का y-निर्देशांक कहते हैं। उचित चिन्ह के साथ लम्बवत् दूरी PQ, बिन्दु P का z-निर्देशांक व्यक्त करती है। अतः अन्तरिक्ष में प्रत्येक बिन्दु P, वास्तविक संख्याओं के त्रिक (x, y, z) से निरूपित किया जा सकता है, जहाँ, x, y, z, बिन्दु P के क्रमशः x-निर्देशांक, y-निर्देशांक तथा z-निर्देशांक व्यक्त करते हैं। संख्याएँ x, y, z, त्रिक में, बिन्दु P के निर्देशांक कहलाती हैं।

निम्नांकित प्रमेय में, दो बिन्दुओं के बीच की दूरी के सूत्र को त्रि-विमीय अवस्था के लिए विस्तृत किया गया है।

प्रमेय 5.5.1 : अन्तरिक्ष में, दो बिन्दुओं P (x_1, y_1, z_1) तथा Q (x_2, y_2, z_2) की बीच की दूरी को निम्न सूत्र से व्यक्त किया जा सकता है :

$$|PQ| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \quad (1)$$

ज्यामितीय ढंग से, व्यंजक (1) पैथागोरियन प्रमेय की सहायता से, आकृति 5.22 में दिखाये गये भाँति, एक 'box' या कमरे से विकर्ण की लम्बाई की गणना का परिणाम है ।



आकृति 5.22

समकोण त्रिभुज PMR तथा PQR में,

$$PQ^2 = PR^2 + QR^2$$

तथा, $PR^2 = PM^2 + MR^2$

इसलिए, $PQ^2 = PM^2 + MR^2 + QR^2 \quad (1)$

परन्तु
$$\left.\begin{aligned} PM &= x_2 - x_1 \\ MR &= y_2 - y^1 \\ QR &= z_2 - z^1 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

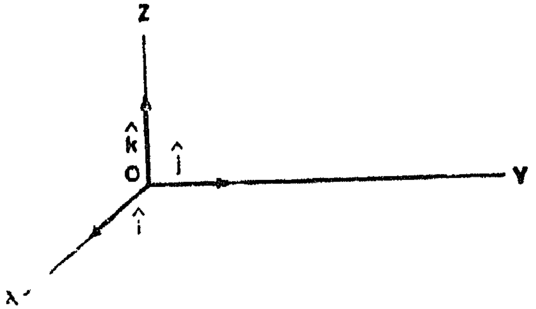
(2) से (1) में मानों को प्रतिस्थापित करने पर,

$$PQ^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2$$

या, $|PQ| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

एक सदिश को त्रिविमा में ठीक वैसे ही परिभाषित किया जाता है जैसे यह द्विविमा में परिभाषित हुआ है ।

त्रिविमीय आयताकार निर्देशांक पद्धति पर विचार करें और आकृति 5.23 में दिखाए गए भाँति x, y तथा z अक्षों के अनु, क्रमशः $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ तथा $\hat{\mathbf{k}}$, मात्रक सदिश लें।



आकृति 5.23

माना, अन्तरिक्ष में एक सदिश **PQ** है, जिसका प्रारम्भिक बिन्दु P (x_1, y_1, z_1) तथा अन्तिम बिंदु Q (x_2, y_2, z_2) है (आकृति 5.22 देखें)।

तब, $\mathbf{PQ}=\mathbf{PR}+\mathbf{RQ}=\mathbf{PM}+\mathbf{MR}+\mathbf{RQ}$

परन्तु $PM=(x_2-x_1)$, $MR=(y_2-y_1)$, तथा $RQ=(z_2-z_1)$,

इसलिए,

$$\mathbf{PM}=(x_2-x_1)\hat{\mathbf{i}}$$

$$\mathbf{MR}=(y_2-y_1)\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{RQ}=(z_2-z_1)\hat{\mathbf{k}}$$

अतः $$\mathbf{PQ}=(x_2-x_1)\hat{\mathbf{i}}+(y_2-y_1)\hat{\mathbf{j}}+(z_2-z_1)\hat{\mathbf{k}} \qquad (3)$$

स्पष्टतया, **PQ** का कान्तिमान

$$|\mathbf{PQ}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

(x_2-x_1), (y_2-y_1) तथा (z_2-z_1) क्रमशः $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ दिशाओं में PQ के घटक कहलाते हैं। विशिष्ट रूप से, यदि P मूल बिन्दु हो तथा Q के निर्देशांक (x, y, z) हों तो,

$$\mathbf{r}=\mathbf{PQ}=x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}+z\hat{\mathbf{k}} \qquad (4)$$

तथा, $$|\mathbf{PQ}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (5)$$

सदिश $\mathbf{r}$, बिन्दु P का **स्थिति सदिश** कहलाता है ।

$\mathbf{r}$ के घटक सदिश, $x\hat{\mathbf{i}}$, $y\hat{\mathbf{j}}$, $z\hat{\mathbf{k}}$ हैं । मात्रक सदिशों $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ के गुणांक, बिन्दु P के निर्देशांक कहलाते हैं, जो सदिश का अन्तिम बिन्दु है ।

यह आसानी से सत्थापित किया जा सकता है कि, (*a*) दो सदिश $\mathbf{a} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}$, तथा $\mathbf{b} = b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}} + b_3\hat{\mathbf{k}}$, बराबर होंगे यदि और केवल यदि उनके घटक बराबर हों ।

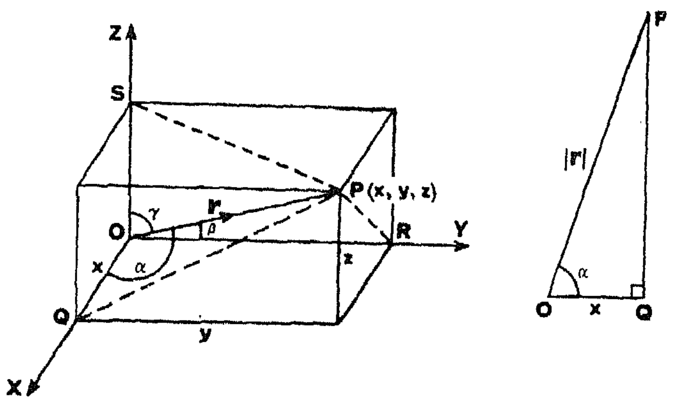
(*b*) यदि, $\mathbf{a} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}$ तथा $\mathbf{b} = b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}} + b_3\hat{\mathbf{k}}$
तो उनका योग $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ निम्न प्रकार से दिया जाता है :

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_1+b_1)\hat{\mathbf{i}} + (a_2+b_2)\hat{\mathbf{j}} + (a_3+b_3)\hat{\mathbf{k}}$$

(*c*) यदि, $\mathbf{a} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}$ तथा λ कोई वास्तविक संख्या हो तो,

$$\lambda\,\mathbf{a} = \lambda\, a_1\hat{\mathbf{i}} + \lambda a_2\hat{\mathbf{j}} + \lambda a_3\hat{\mathbf{k}}$$

उपरोक्त वर्णन में, हमने, सदिश **P** का कान्तिमान, ज्ञात किया है । उसकी दिशा क्या होगी ? इसके लिए, एक सदिश $\mathbf{r}$ पर विचार करो, जिसका प्रारम्भिक बिन्दु मूलबिन्दु O (0, 0, 0) तथा अन्तिम बिंदु P (x, y, z) है । तब, x, y, z सदिश **OP** के क्रमशः x, y तथा z-अक्षों के अनु, घटक हैं । माना सदिश **OP**, OX, OY तथा OZ-अक्षों से क्रमशः α, β तथा γ, कोण बनाती हैं । जैसा कि, आकृति 5.24 में दर्शाया गया है ।



आकृति 5.24

आकृति 5.24 की सहायता से, हम देखते हैं कि,

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\mathbf{r}|}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|\mathbf{r}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\mathbf{r}|},$$

जहाँ $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, तथा α, β, γ, 0, तथा π (दोनों के समावेश सहित) के बीच वाले कोण हैं ।

इसलिए, $x = |\mathbf{r}| \cos\alpha$ $y = |\mathbf{r}| \cos\beta$, $z = |\mathbf{r}| \cos\gamma$,

जहाँ $\cos\alpha$, $\cos\beta$ तथा $\cos\gamma$, संख्याओं x, y, तथा z के समानुपाती हैं और वे संख्यायें सदिश की **दिक् संख्यायें (direction numbers)** कहलाती हैं। दिक्कोज्यायें $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, सम्बन्ध $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2=1$ को सन्तुष्ट करती हैं। यह निम्नांकित सम्बन्धों से सिद्ध होता है :

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\mathbf{r}|}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|\mathbf{r}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\mathbf{r}|} \tag{6}$$

तथा $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

समीकरण (6) के पदों को वर्ग करके जोड़ने पर,

$$\text{os}^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = \frac{x^2+y^2+z^2}{|\mathbf{r}|^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} = 1$$

निम्नांकित परिभाषा, इन प्रेक्षणों का एक स्वभाविक परिणाम हैं :

परिभाषा 5.5.1 : निर्देशांक अक्षों के साथ सदिश $\mathbf{r}$ द्वारा बने हुए कोणों α, β, γ की कोटिज्या को, सदिश की, **दिक्कोज्या (direction cosine)** कहते हैं। α, β तथा γ कोण, सदिश के **दिक् कोण (direction angle)** कहलाते हैं।

यदि, एक मात्रक सदिश $\hat{\mathbf{a}}$ की दिक्कोज्या $\cos\alpha$, $\cos\beta$, तथा $\cos\gamma$ हों तो $\hat{\mathbf{a}}$ को निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है।

$$\hat{\mathbf{a}} = \cos\alpha\hat{\mathbf{i}} + \cos\beta\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\gamma\hat{\mathbf{k}}$$

उदाहरण 1 : सदिशों $\mathbf{a} = 2\hat{\mathbf{i}}+4\hat{\mathbf{j}}-5\hat{\mathbf{k}}$ तथा $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}$ के योग के समान्तर, एक मात्रक सदिश ज्ञात करो।

हल : सदिशों का योग $\mathbf{r} = (2\hat{\mathbf{r}}+4\hat{\mathbf{j}}-5\hat{\mathbf{k}})+(\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}})$

$$= 3\hat{\mathbf{i}}+6\hat{\mathbf{j}}-2\hat{\mathbf{k}}$$

तथा $|\mathbf{r}| = |3\hat{\mathbf{i}}+6\hat{\mathbf{j}}-2\hat{\mathbf{k}}| = \sqrt{(3)^2+(6)^2+(-2)^2} = 7$

अतः $\mathbf{r}$ के समान्तर एक मात्रक सदिश $\hat{\mathbf{r}} = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ है।

$$\text{परन्तु } \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{3\hat{\mathbf{i}}+6\hat{\mathbf{j}}-2\hat{\mathbf{k}}}{7} = \frac{3}{7}\hat{\mathbf{i}} + \frac{6}{7}\hat{\mathbf{j}} - \frac{2}{7}\hat{\mathbf{k}} \tag{7}$$

ध्यान रखें कि, $\frac{3}{7}$, $\frac{6}{7}$, तथा $-\frac{2}{7}$, सदिश $\hat{\mathbf{r}}$ की दिक्कोज्या हैं। यह सत्यापित करने के लिए कि समीकरण (7) का सदिश, एक मात्रक सदिश है हमको दिखाना है कि,

$$|\hat{\mathbf{r}}| = \left|\frac{3}{7}\hat{\mathbf{i}} + \frac{6}{7}\hat{\mathbf{j}} - \frac{2}{7}\hat{\mathbf{k}}\right| = 1$$

अब, $\left| \frac{3}{7}\hat{\mathbf{i}} + \frac{6}{7}\hat{\mathbf{j}} - \frac{2}{7}\hat{\mathbf{k}} \right| = \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(-\frac{2}{7}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{9}{49} + \frac{36}{49} + \frac{4}{49}} = 1,$$

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 2 : यदि, **a, b, c, d** सदिशों को, $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{b} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$, $\mathbf{c} = 3\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$ $\mathbf{d} = \hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{j}}$, से व्यक्त किया गया हो तो सिद्ध करो कि सदिश $(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ तथा $(\mathbf{d} - \mathbf{c})$ समान्तर हैं। उनके मापांकों का अनुपात भी ज्ञात करो।

हल : हम देखते हैं कि,

$$\mathbf{b} - \mathbf{a} = (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}) - (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$$

तथा, $\mathbf{d} - \mathbf{c} = (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{j}}) - (3\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}) = -3\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$

$$= -3(\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}) = -3(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

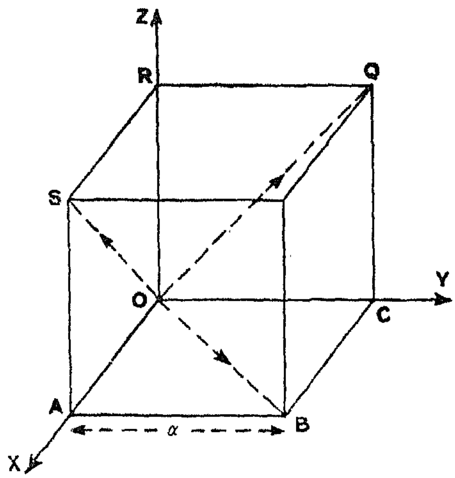
अतः $\mathbf{d} - \mathbf{c}$, $(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ के समान्तर है।

पुनः $|\mathbf{b} - \mathbf{a}| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

$|\mathbf{d} - \mathbf{c}| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + (3)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

इसलिये, $|\mathbf{b} - \mathbf{a}| : |\mathbf{d} - \mathbf{c}| = 1 : 3.$

उदाहरण 3 : a, $2a$, $3a$, क्रांतिमान वाले तीन सदिश एक बिन्दु पर मिलते हैं और उनकी दिशायें, एक घन के तीन क्रमागत फलकों OCQR, OASR, तथा OABC के विकर्णों OQ, OS तथा OB के अनु हैं। (आकृति 5.25 देखें)। उनके योग तथा उनकी दिक्कोज्यायें ज्ञात करो।



आकृति 5.25

हल : फलक OCQR के विकर्ण OQ के अनु, एक मात्रक सदिश $\frac{\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{2}}$ है क्योंकि, $\mathbf{OQ} = \alpha(\hat{j}+\hat{k})$ यहाँ पर सदिश α इस प्रकार लिया गया है कि **OQ** का कांतिमान **a** है। इस प्रकार

तब, $$\frac{\mathbf{OQ}}{|\mathbf{OQ}|} = \frac{\alpha(\hat{j}+\hat{k})}{\sqrt{\alpha^2+\alpha^2}} = \frac{\alpha(\hat{j}+\hat{k})}{\alpha\sqrt{2}} = \frac{\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{2}}.$$

इसलिये, OQ के अनु, एक सदिश जिसका कान्तिमान a है।

$$\frac{\alpha(\hat{j}+\hat{k})}{\sqrt{2}} \text{ है।} \qquad (1)$$

इसी तरह, फलक OASR के विकर्ण OS के अनु, मात्रक सदिश

$$\frac{\hat{k}+\hat{i}}{\sqrt{2}} \text{ है।}$$

इसलिए, OS के अनु, सदिश जिसका कान्तिमान $2a$ है

$$\frac{2a(\hat{k}+\hat{i})}{\sqrt{2}} \text{ है।} \qquad (2)$$

तथा OB के अनु, सदिश जिसका कान्तिमान $3a$ है

$$\frac{3a(\hat{i}+\hat{j})}{\sqrt{2}} \text{ है।} \qquad (3)$$

यदि, इन सदिशों का योग **R** हो तो

$$\mathbf{R} = \frac{a(\hat{j}+\hat{k})}{\sqrt{2}} + \frac{2a(\hat{k}+\hat{i})}{\sqrt{2}} + \frac{3a(\hat{i}+\hat{j})}{\sqrt{2}},$$

$$|\mathbf{R}| = \left|\frac{a}{\sqrt{2}}(5\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})\right| \qquad (4)$$

या $$|\mathbf{R}| = \left|\frac{a}{\sqrt{2}}\right|\sqrt{(5)^2+(4)^2+(3)^2} = 5a \qquad (4)$$

इसलिए, सदिशों के योग की कार्यरेखा की दिक्कोज्यायें,

$$\frac{\frac{5a}{\sqrt{2}}}{5a}, \frac{\frac{4a}{\sqrt{2}}}{5a}, \frac{\frac{3a}{\sqrt{2}}}{5a},$$

या, $$\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{3}{5\sqrt{2}}, \text{ हैं।}$$

उदाहरण 4 : दिखाओ कि, बिन्दु A (2, 6, 3), B (1, 2, 7), तथा C (3, 10, —1) संरेख हैं।

हल : स्पष्टतया, $\mathbf{AB}=(1-2)\hat{\mathbf{i}}+(2-6)\hat{\mathbf{j}}+(7-3)\hat{\mathbf{k}}$

$$=-\hat{\mathbf{i}}-4\hat{\mathbf{j}}+4\hat{\mathbf{k}}$$

तथा, $\mathbf{AC}=(3-2)\hat{\mathbf{i}}+(10-6)\hat{\mathbf{j}}+(-1-3)\hat{\mathbf{k}}$

$$=\hat{\mathbf{i}}+4\hat{\mathbf{j}}-4\hat{\mathbf{k}}$$

चूंकि, $\mathbf{AB}=-\hat{\mathbf{i}}-4\hat{\mathbf{j}}+4\hat{\mathbf{k}}=-(\hat{\mathbf{i}}+4\hat{\mathbf{j}}-4\hat{\mathbf{k}})$

$$=-\mathbf{AC}$$

इसलिए, दोनों सदिश समान्तर हैं परन्तु A, दोनों में उभयनिष्ठ है, अतः बिन्दु A, B, C अवश्य ही संरेख हैं।

प्रश्नावली 5.3

1. यदि, दो बिन्दुओं A तथा B के स्थिति सदिश क्रमशः $7\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}}$, तथा $2\hat{\mathbf{i}}-5\hat{\mathbf{j}}+4\hat{\mathbf{k}}$ हों तो **AB** का कान्तिमान एवं दिशा ज्ञात करो।
2. निम्नांकित में से प्रत्येक के लिए, सदिश **PQ** तथा उसकी दिक्कोज्या ज्ञात करो जबकि P तथा Q के निर्देशांक दिये हुए हैं।
   (*i*) P (1, 4, −3), Q (2, −2, −1)
   (*ii*) P (2, −1, −1), Q (−1, −3, 2)
   (*iii*) P (−3, 4, −1), Q (2, 5, 3)
   (*iv*) P (3, −1, 7), Q (4, −3, −1).
3. बिन्दुओं A, B, C तथा D के स्थिति सदिश क्रमशः $4\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}}$, $5\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{k}}$, $2\hat{\mathbf{i}}-2\hat{\mathbf{j}}-3\hat{\mathbf{k}}$, तथा $4\hat{\mathbf{i}}+4\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}$ हैं। दिखाओ कि, AB तथा CD समान्तर हैं।
4. सदिशों $\hat{\mathbf{i}}+4\hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{k}}$, $3\hat{\mathbf{i}}-3\hat{\mathbf{j}}-2\hat{\mathbf{k}}$ तथा $-2\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+6\hat{\mathbf{k}}$ के योग सदिश का मापांक एवं मात्रक सदिश ज्ञात करो।
5. एक त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु, P (2, −1, 3), Q (8, 5, −6) तथा R (4, 1, 0) हैं। दिखाओ कि, PQ = 3PR, तथा यह भी दिखाओ कि **QR** की दिक्कोज्यायें $-\frac{2}{\sqrt{17}}$, $\frac{-2}{\sqrt{17}}$, $\frac{3}{\sqrt{17}}$, हैं।

6. सदिश $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ की दिशा में मात्रक सदिश ज्ञात करो। जहाँ,

$$\mathbf{r}_1 = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{r}_2 = 3\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}.$$

7. यदि सदिश, $a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}} + c\hat{\mathbf{k}}$ तथा $-2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ आपस में बराबर हों तो a, b तथा c के मान बताओ।

8. यदि, $\mathbf{a} = 2\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{b} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}}$ तथा $\mathbf{c} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ हों तो, निम्नांकित में से प्रत्येक का मान बताओ :

(*i*) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ (*ii*) $3\mathbf{a} + \mathbf{c}$
(*iii*) $\mathbf{c}$ की दिशा में एक मात्रक सदिश (*iv*) $|\mathbf{c}|\,\mathbf{a}$
(*v*) $|\mathbf{b}| \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ (*vi*) $\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\,\mathbf{c}$ की दिवकोज्यायें

9. बिन्दुओं A, B तथा C के स्थिति सदिश क्रमशः $2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$, $3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ तथा $\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$ हैं। दिखाओ कि, A, B तथा C संरेख हैं।

10. दिखाओ कि, बिन्दु $(2, -1, 3)$, $(3, -5, 1)$; $(-1, 11, 9)$, संरेख हैं।

5.6. सदिशों का गुणनफल (Multiplication of Vectors)

पूर्व अनुच्छेदों में, हमने, सदिश-योग तथा एक सदिश का एक अदिश से गुणन का वर्णन किया है। इस अनुच्छेद में, हम एक सदिश से सदिश के गुणनफल पर विचार करेंगे।

सम्मिश्र संख्याओं के बीजगणित से हम जानते हैं कि, दो सम्मिश्र संख्याओं का गुणनफल या तो एक सम्मिश्र संख्या होती है या वास्तविक संख्या। उदाहरणस्वरूप, सम्मिश्र संख्याओं $(2+3i)$ तथा $(3+2i)$ का गुणनफल, सम्मिश्र संख्या $13i$ है जबकि सम्मिश्र संख्याओं $(1+2i)$ तथा $(1-2i)$ का गुणनफल एक वास्तविक संख्या 5 है। सदिशों के गुणनफल, सम्मिश्र संख्याओं के गुणनफल से बहुत ही समानता रखते हैं। दो सदिशों का गुणनफल या तो एक सदिश होता है या एक अदिश। यदि, दो सदिशों का गुणनफल एक सदिश है तो उसे **सदिश गुणनफल (vector product)** और यदि गुणनफल एक अदिश है तो उसे **अदिश गुणनफल (scalar product)** कहते हैं।

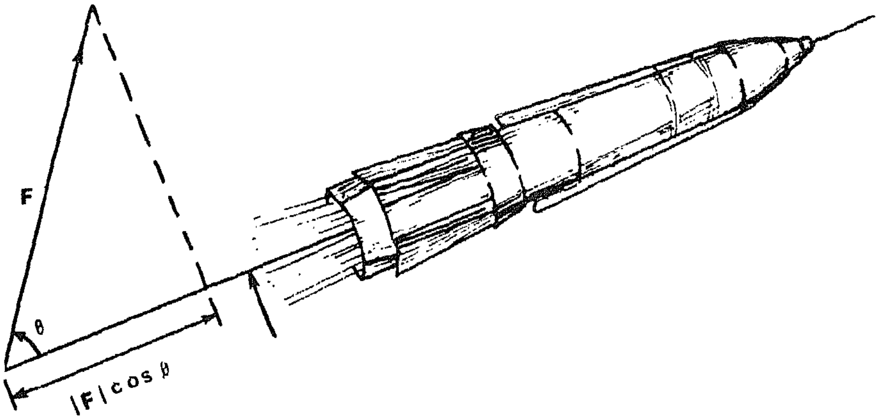
बल तथा विस्थापन की सदिश राशियों की, भौतिकी तथा अभियांत्रिकी की बहुत सी समस्याओं के अध्ययन में, महत्त्वपूर्ण भूमिका है। विस्थापन $\mathbf{s}$ के लिए एक अचर बल $\mathbf{F}$ के विरुद्ध किया गया कार्य, $\mathbf{s}$ की दिशा में $\mathbf{F}$ के घटक को $\mathbf{s}$ के कांतिमान से गुणा करने पर, परिभाषित होता है। प्रतीकों में, यदि $\mathbf{s}$ तथा $\mathbf{F}$ की कार्य रेखाओं के बीच θ कोण हो तो,

$$\text{कार्य} = W = |\mathbf{F}| \cos\theta\, |\mathbf{s}| = |\mathbf{F}|\, |\mathbf{s}| \cos\theta$$

(आकृति 5·26 देखें)

ध्यान रखें, कि यद्यपि, कार्य की परिभाषा में सम्मिलित बल तथा विस्थापन दोनों राशियाँ सदिश होती हैं फिर भी कार्य एक **अदिश** है। कार्य की मौलिक परिभाषा, जिसमें यह कार्य रेखा के अनुबल तथा विस्थापन के गुणनफल से परिभाषित होता है, को कायम रखने के उद्देश्य से एक नवीन धारणा प्रस्तुत की गयी

है, जिसे **अदिश गुणनफल या बिन्दु गुणनफल (dot product)** कहते हैं। इसे औपचारिक रूप में निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं।

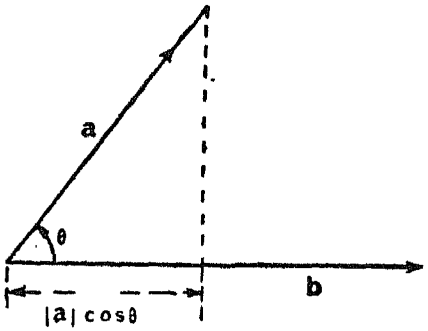


आकृति 5.26

परिभाषा : 5.6.1. माना, **a** तथा **b** दो दिये हुए सदिश हैं तथा उनके बीच का कोण θ है। **a** तथा **b** का **अदिश गुणनफल** निम्न प्रकार से परिभाषित होता है :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \, |\mathbf{b}| \cos \theta,$$

यहाँ, $|\mathbf{a}|$ तथा $|\mathbf{b}|$ क्रमशः **a** तथा **b** के कांतिमान हैं जो अदिश राशियाँ है तथा अदिश $\cos \theta$, सदिशों **a** तथा **b** के बीच के कोण की कोटिज्या है (आकृति 5·27 देखें)।



आकृति 5·27

चूंकि **a** तथा **b** के बीच बिन्दु संकेतन प्रयुक्त होता है, इसलिए अदिश गुणनफल को प्रायः तथा **b** का **बिन्दु गुणनफल** कहते हैं।

ध्यान रखें कि, दो सदिशों का अदिश गुणनफल एक अदिश राशि होता है। निम्नांकित प्रेक्षण, सदिशों के और अध्ययन में सहायक सिद्ध होंगे :

I. उपरोक्त परिभाषा में, स्थिति $\mathbf{a}=0$, या $\mathbf{b}=0$ को अलग से अभिक्रियित करना है, क्योंकि $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ के बीच के कोण θ की तभी सार्थकता है जबकि $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ दोनों सदिश अ-शून्य हों। परन्तु, व्यवहार में, यदि $\mathbf{a}=0$, या $\mathbf{b}=0$, हो तो संकेत $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta$ का मान शून्य होता है।

II. चूँकि $|\mathbf{b}|\cos\theta$, $\mathbf{a}$ की दिशा में, $\mathbf{b}$ का घटक (वियोजित भाग) और $|\mathbf{a}|\cos\theta$, $\mathbf{b}$ की दिशा में, $\mathbf{a}$ का घटक है इसलिए अदिश, गुणनफल को एक के मापांक और पहले की दिशा में दूसरे के वियोजित भाग के गुणनफल से भी परिभाषित किया जा सकता है।

III. यदि, $\theta=90^\circ$, अर्थात् यदि सदिश $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ एक दूसरे के लंबवत् हों तो अदिश गुणनफल, शून्य के बराबर होता है, क्योंकि तब $\mathbf{a}.\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos 90^\circ=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,0=0$. विलोमत: यदि, $\mathbf{a}.\mathbf{b}=0$ तथा $\mathbf{a}\neq 0$ और $\mathbf{b}\neq 0$ हो तो $\theta=90^\circ$ होगा और इस दशा में सदिश $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ परस्पर लंबवत् होंगे।

अत: दो सदिश $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ लंबवत् होंगे यदि और केवल यदि $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}=0$. विशिष्ट रूप से, चूँकि $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ परस्पर लंबवत् अर्थात् युग्मों में समकोण पर हैं, इसलिए, $\hat{\mathbf{i}}\,.\,\hat{\mathbf{j}}=\hat{\mathbf{j}}\,.\,\hat{\mathbf{k}}=\hat{\mathbf{k}}\,.\,\hat{\mathbf{i}}=0$.

एक शून्य सदिश, प्रत्येक दूसरे सदिश पर लंबवत् होता है।

IV. यदि, $\theta=0$ अर्थात् $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ समान सदिश हों (दो सदिश जब एक ही दिशा में होते हैं तो वे **समान सदिश** कहलाते हैं, उनके कांतिमान भिन्न हो सकते हैं) तो $\mathbf{a}.\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|=ab$

यह परिणाम सर्वदा सत्य है क्योंकि, $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos 0$

$$=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|=ab.$$

विशिष्ट रूप से, $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{a}=a^2$ होता है। $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{a}$ को $\mathbf{a}^2$ भी लिखा जाता है। अर्थात् $\mathbf{a}^2=a^2$.

अत: $\hat{\mathbf{i}}^2=\hat{\mathbf{j}}^2=\hat{\mathbf{k}}^2=1$, क्योंकि $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ मात्रक-सदिश हैं।

V. यदि, $\theta=\pi$ अर्थात् $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ असमान समान्तर सदिश (दो सदिशों की दिशायें, अगर विपरीत होती हैं तो वे **असमान सदिश** कहलाते हैं) हों तो $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}=-ab$, क्योंकि,

$$\mathbf{a}.\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\pi=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,(-1)=-ab.$$

VI. यदि, दो सदिशों $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ में से किसी एक को एक वास्तविक संख्या अर्थात् n से गुणा किया जाय तो गुणनफल $(n\,\mathbf{a})\,.\,b$ को निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं :

$$(n\,\mathbf{a})\,.\,\mathbf{b}=n\,(ab\cos\theta)=\mathbf{a}\,.\,(n\,\mathbf{b})$$

VII. परिभाषा से, अदिश गुणन चूँकि एक संख्या है, इसलिए हम इसे सदिश के अदिश गुणक के रूप में प्रयुक्त कर सकते हैं। इस संदर्भ में, $(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,\mathbf{c}$ का तात्पर्य एक ऐसे सदिश से है जो सदिश $\mathbf{c}$ की दिशा में है और जिसका कांतिमान, $\mathbf{c}$ के मापांक का, $ab\cos\theta$ गुना है। पुन: $(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,(\mathbf{c}\,.\,\mathbf{d})$, एक संख्या है क्योंकि यह दो अदिशों का गुणनफल है।

अदिश गुणनफल के बीजीय गुण-धर्म (Algebraic Properties of the Scalar Product)

अदिश गुणनफल के निम्नांकित गुण-धर्म हैं।

I. **अदिश गुणनफल क्रम विनिमेय है,** अर्थात्

$$\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}=\mathbf{b}\,.\,\mathbf{a}$$

उपपत्ति : परिभाषा 5.6.1 से, हम देखते हैं कि,

$$\mathbf{a.b} = (ab) \cos \theta \text{ तथा,}$$

$$\mathbf{b} \,.\, \mathbf{a} = (ba) \cos \theta = ab \cos \theta = \mathbf{a} \,.\, \mathbf{b},$$

जो कथन को सत्य सिद्ध करता है ।

II. अदिश के संदर्भ में, अदिश गुणनफल सहचारी है,

अर्थात् यदि, n एक अदिश हो तो,

$$n(\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b}) = (n\mathbf{a}) \,.\, \mathbf{b} = \mathbf{a} \,.\, (n\mathbf{b})$$

उपपत्ति : माना, n एक धनात्मक संख्या है, तब,

$$n(\mathbf{a.b}) = n(ab) \cos \theta = (nab) \cos \theta$$

चूँकि, $n\,\mathbf{a}$ तथा $n\,\mathbf{b}$ क्रमशः $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ की दिशाओं में na तथा nb कांतिमान वाले सदिश हैं, इसलिये

$$(n\,\mathbf{a}) \,.\, \mathbf{b} = (na)\, b \cos \theta = (nab) \cos \theta$$

तथा $\mathbf{a}.(n\mathbf{b}) = a(nb) \cos \theta = (nab) \cos \theta,$

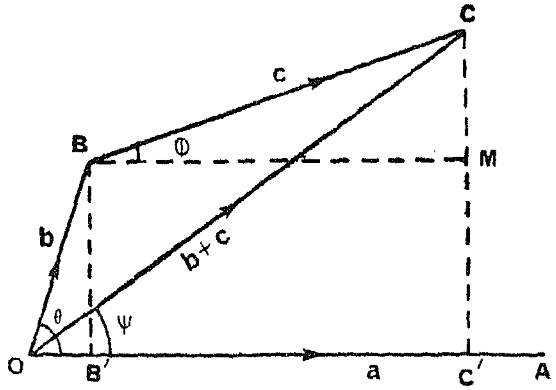
जिससे $n(\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b}) = (n\,\mathbf{a}) \,.\, \mathbf{b} = \mathbf{a} \,.\, (n\mathbf{b})$

प्राप्त होता है । जब n ऋणात्मक होता है तब भी उसी विधि से अग्रसर होते हैं ।

III. सदिश योग के सन्दर्भ में, अदिश गुणनफल बंटन-नियम का पालन करता $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ तथा $\mathbf{c}$ तीन सदिश हों तो,

$$\mathbf{a} \,.\, (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a} \,.\, \mathbf{b} + \mathbf{a} \,.\, \mathbf{c}.$$

उपपत्ति : माना, तीन सदिश $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ तथा $\mathbf{c}$ आकृति 5.28 में क्रमशः **OA, OB** तथा **BC** से निरुपित किये गये हैं ।



आकृति 5·28.

तब योग ($\mathbf{b} + \mathbf{c}$) को **OC** से प्रदर्शित करते हैं । यदि, सदिश युग्म $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$; $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$, $(\mathbf{b} + \mathbf{c},)$, के आनति कोण क्रमशः θ, ϕ तथा ψ हों तो,

$$\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b} + \mathbf{a} \,.\, \mathbf{c} = \text{OA.OB} \cos \theta + \text{OA.BC} \cos \phi$$

$$= \text{OA} \,(\text{OB} \cos \theta + \text{BC} \cos \phi)$$

परन्तु $OB \cos \theta = OB'$ तथा $BC \cos \phi = BM = B'C'$

इसलिये, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = OA\ (OB' + B'C') = OA.OC'$ (1)

तथा $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = OA.OC \cos \psi = OA.OC'$ (2)

(1) तथा (2) से हम देखते हैं कि,

$\mathbf{a}. (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

यह आसानी से सिद्ध किया जा सकता है कि,

$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$.

कभी-कभी निम्नांकित प्रकार से व्युत्पन्न होने वाला अदिश गुणनफल का विश्लेषणात्मक स्वरूप ज्यादा उपयोगी एवं सुगम होता है।

यदि $\mathbf{a} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}$ तथा $\mathbf{b} = b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}} + b_3\hat{\mathbf{k}}$ तो $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ का अदिश गुणनफल निम्न प्रकार से दिया जाता है :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}).(b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}} + b_3\hat{\mathbf{k}})$$

$$= a_1b_1\ \hat{\mathbf{i}}^2 + a_1b_2\ \hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{j}} + a_1b_3\ \hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{k}} + a_2b_1\ \hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{j}}$$

$$+ a_2b_2\ \hat{\mathbf{j}}^2 + a_2b_3\ \hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{k}} + a_3b_1\ \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{i}}$$

$$+ a_3b_2\ \hat{\mathbf{k}}.\hat{\mathbf{j}} + a_3b_3\ \hat{\mathbf{k}}^2.$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

क्योंकि, $\hat{\mathbf{i}}^2 = \hat{\mathbf{j}}^2 = \hat{\mathbf{k}}^2 = 1$ तथा,

$\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}.\hat{\mathbf{i}} = 0$

इसलिये, $\mathbf{a}.\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ (3)

हम, $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ के बीच के कोण θ को $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ के घटकों के पदों में ज्ञात कर सकते हैं।

समीकरण (3) से, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

या, $|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}| \cos \theta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

अतः $\cos \theta = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ (4)

उदाहरण 1 : यदि सदिश $a = 3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}$ तथा $\mathbf{b} = -5\hat{\mathbf{i}} + \lambda\hat{\mathbf{j}}$ परस्पर लम्बवत हों तो, λ का मान ज्ञात करो।

हल : $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \times (-5) + 4\lambda$, (3) से

चूँकि $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ लम्बवत् हैं, इसलिये, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

अतः $-15 + 4\lambda = 0$ या, $\lambda = \dfrac{15}{4}$.

उदाहरण 2 : यदि, एक कण बिन्दु A (1, 2, 0) से बिन्दु B (2, –1, 3) पर विस्थापित किया जाता है तो उस कण पर क्रियाशील बल $\mathbf{F}=4\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}$ द्वारा किया हुआ कार्य ज्ञात करो।

हल : किया हुआ कार्य **F. s**, जहाँ **F** दिया हुआ बल तथा **s** विस्थापन है।

$$\mathbf{s}=\text{विस्थापन}=\mathbf{AB}=(2-1)\,\hat{\mathbf{i}}+(-1-2)\,\hat{\mathbf{j}}+(3-0)\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$=\hat{\mathbf{i}}-3\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}$$

अतः किया हुआ कार्य $=\mathbf{F}\,.\,\mathbf{AB}=(4\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}).(\hat{\mathbf{i}}-3\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}})$

$$=(4\times1)+[2\times(-3)]+3\times3, \qquad (3) \text{ से}$$

$$=4-6+9$$

$$=7$$

इसलिये, किया हुआ कार्य = 7 इकाई।

उदाहरण 3 : यदि, **a** तथा **b** लम्बवत् सदिश हों तो दिखाओ कि,

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2=(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$$

हल : यहाँ पर,

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{a}^2+\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}+\mathbf{b}\,.\,\mathbf{a}+\mathbf{b}^2$$

$$=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2, \text{ क्योंकि } \mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}=\mathbf{b}\,.\,\mathbf{a}=0$$

$$=a^2+b^2$$

पुनः $(\mathbf{a}-\mathbf{b}).(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}^2-\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}-\mathbf{b}\,.\,\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2$

$$=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2 \text{ क्योंकि, } \mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}=\mathbf{b}\,.\,\mathbf{a}=0$$

$$=a^2+b^2$$

इसलिये, $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2=(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$

उदाहरण 4 : सदिशों $\mathbf{a}=2\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$, तथा $\mathbf{b}=3\hat{\mathbf{i}}-4\hat{\mathbf{j}}-4\hat{\mathbf{k}}$ के बीच का कोण ज्ञात करो।

हल : यदि **a** तथा **b** के बीच कोण θ हो तो समीकरण (4) की सहायता से,

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}=\frac{2\times3+1\times4-1\times4}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(1)^2}\,\sqrt{(3)^2+(-4)^2+(-4)^2}}$$

$$=\frac{6}{\sqrt{6}\,\sqrt{41}}=\frac{\sqrt{6}}{41}$$

इसलिए,

$$\theta=\cos^{-1}\sqrt{\frac{6}{41}}$$

उदाहरण 5 : यदि, $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$ तथा $|\mathbf{a}|=3$, $|\mathbf{b}|=5$, $|\mathbf{c}|=7$, हो तो **a** तथा **b** के बीच का कोण ज्ञात करो।

हल : माना **a** तथा **b** के बीच का कोण θ है। सूत्र (4) से

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}.$$

हमको **a.b** प्राप्त करना है।

$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$ से हम देखते हैं कि $\mathbf{a}+\mathbf{b}=-\mathbf{c}$

चूंकि $\mathbf{c}^2=\mathbf{c}.\mathbf{c}=(\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{a}+\mathbf{b})$

$=\mathbf{a}^2+2\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{b}^2$

अतः $\mathbf{a}.\mathbf{b}=\dfrac{\mathbf{c}^2-\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2}{2}$

$=\frac{1}{2}(7^2-4^2-5^2)$

$=\dfrac{15}{2}$

इसलिए, $\cos\theta=\dfrac{\frac{15}{2}}{3\cdot5}=\dfrac{1}{2}$

या, $\theta=60^\circ$

उदाहरण 6 : सिद्ध करो कि, अर्द्धवृत्त का कोण, समकोण होता है।

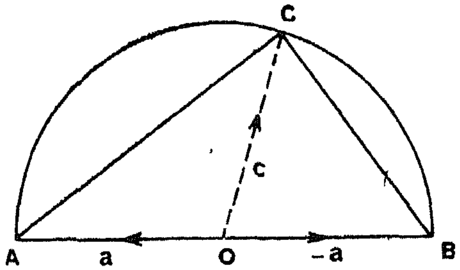
उपपत्ति : माना, केन्द्र O तथा व्यास AOB वाले अर्द्धवृत्त पर कोई बिन्दु C है। (आकृति 5·29 देखें)।

माना, O के सन्दर्भ में A तथा C के स्थिति सदिश क्रमशः **a** तथा **c** हैं। तब $OB=-\mathbf{a}$, $\mathbf{AC}=\mathbf{c}-\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{BC}=\mathbf{c}+\mathbf{a}$ अब,

$\mathbf{AC}.\mathbf{BC}=(\mathbf{c}-\mathbf{a}).(\mathbf{c}+\mathbf{a})$

$=\mathbf{c}^2-\mathbf{a}^2$

$=c^2-a^2$



आकृति 5.29

परन्तु $|\mathbf{OA}|=|\mathbf{OC}|$,

अतः $\mathbf{AC}.\mathbf{BC}=0$ तथा **AC**, **BC** पर लम्ब है अर्थात् $\angle ACB$, एक समकोण है।

उदाहरण 7 : सम त्रिभुजों के लिए, **कोटिज्या नियम*** का प्रतिपादन करो।

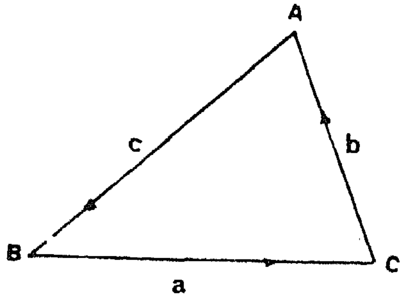
***कोटिज्या नियम**—यह इस प्रकार है : त्रिभुज की किसी भी भुजा का वर्ग, उसकी अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग में से दोनों भुजाओं तथा उनके अन्तर्विष्ट कोण की कोटिज्या के गुणनफल के दुगुने को घटाने से प्राप्त, राशि के बराबर होता है। अर्थात किसी त्रिभुज ABC के लिए,

(1) $a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos A$

(2) $b^2=c^2+a^2-2\,ca\cos B$

(3) $c^2=a^2+b^2-2\,ab\cos C$

हल : त्रिभुज ABC में, माना A, B, C, आन्तरिक कोण तथा a, b, c, उनकी विपरीत भुजा प्रदर्शित करते हैं (आकृति 5.30 देखें)।



आकृति 5.30

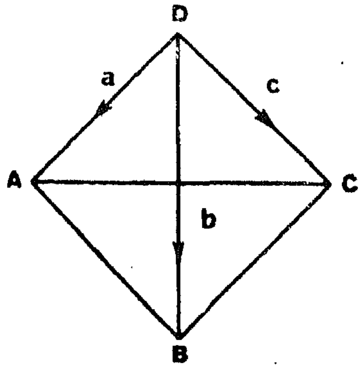
तब, $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$ तथा,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})$$
$$=\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$$

या, $a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos A$ क्योंकि $\mathbf{b}$ तथा $\mathbf{c}$ के बीच कोण $(\pi-A)$ है। यही सम त्रिभुजों के लिए **कोटिज्या नियम** है।

उदाहरण 8 : एक चतुष्फलक में, यदि विपरीत सिरों के दो युग्म परस्पर लम्बवत् हों तो तीसरा युग्म भी एक दूसरे के लम्बवत् होगा तथा दो विपरीत सिरों के वर्गों का योग प्रत्येक युग्म के लिए एक ही होगा।

हल : माना, ABCD एक चतुष्फलक है तथा D को मूल बिन्दु मानकर A, B, C के स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ है (आकृति 5.31 देखें)।



आकृति 5.31

यदि, DA तथा BC, परस्पर लम्बवत् हों तो, $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b})=0$

या, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$

इसी तरह, यदि DB तथा AC, परस्पर लम्बवत् हों तो,

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$$

या, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (2)

समीकरण (1) तथा (2) से हम देखते हैं कि,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

या, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$

या, $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = 0$

या, $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{DC} = 0$

अर्थात् AB तथा DC परस्पर लम्बवत् हैं ।

अब, $DA^2 + BC^2 = \mathbf{a}^2 + (\mathbf{c} - \mathbf{b})^2$

$$= \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$$

इसी तरह, $DB^2 + AC^2 = \mathbf{b}^2 + (\mathbf{c} - \mathbf{a})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$

तथा, $DC^2 + AB^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

परन्तु समीकरण (1) तथा (2) से,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a},$$

इसलिए, $DA^2 + BC^2 = DC^2 + AB^2 = DB^2 + AC^2$

प्रश्नावली 5.4

1. यदि, $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{b} = -2\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$ तथा $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$, तो निम्नांकित के मान बताओ :

   (*i*) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

   (*ii*) $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, $|\mathbf{c}|$

   (*iii*) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ तथा $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$. क्या वे बराबर हैं ?

   (*iv*) $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}$

   (*v*) **a** तथा **b**, **b** तथा **c**, **c** तथा **a** , के बीच का कोण ज्ञात करो ।

2. निम्नांकित प्रश्नों में से प्रत्येक में, एक कण पर क्रियाशील बल F द्वारा किया हुआ कार्य ज्ञात करो जबकि कण बिन्दु A से बिन्दु B तक विस्थापित होता है :

   (*i*) A : (0, 1, 2) ; B : (−2, 3, 0) ; $\mathbf{F} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$

   (*ii*) A : (1, 2, −3) ; B : (2, 0, −5) ; $\mathbf{F} = 2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$

   (*iii*) A : (3, 3, 3) ; B : (4, 4, 4) ; $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$

(*iv*) A : (1, 2, 0) ; B : (0, 2, 3) ; $\mathbf{F}=4\hat{\mathbf{i}}-3\hat{\mathbf{k}}$

(*v*) A : (−3, −4, 1) ; B : (−1, −1, −2) ; $\mathbf{F}=3\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}-2\hat{\mathbf{k}}$

3. यदि निम्नांकित सदिश **a** तथा **b** परस्पर लम्बवत् हो तो λ का मान बताओ।

(*i*) $\mathbf{a}=2\hat{\mathbf{i}}+\lambda\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$; $\mathbf{b}=\hat{\mathbf{i}}-2\hat{\mathbf{j}}-3\hat{\mathbf{k}}$

(*ii*) $\mathbf{a}=\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+\lambda\hat{\mathbf{k}}$; $\mathbf{b}=4\hat{\mathbf{i}}-3\hat{\mathbf{k}}$

(*iii*) $\mathbf{a}=2\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}}$; $b=\lambda\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}-5\hat{\mathbf{k}}$

4. निम्नांकित सदिश-युग्मों के लिए अदिश गुणनफल तथा उनके बीच का कोण ज्ञात करो।

(*i*) $-2\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}}$ तथा $4\hat{\mathbf{i}}+7\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}$

(*ii*) $2\hat{\mathbf{i}}-3\hat{\mathbf{j}}+6\hat{\mathbf{k}}$ तथा $2\hat{\mathbf{i}}-3\hat{\mathbf{j}}-5\hat{\mathbf{k}}$

(*iii*) $\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}$ तथा $\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$

(*iv*) $\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}-8\hat{\mathbf{k}}$ तथा $-3\hat{\mathbf{i}}-5\hat{\mathbf{j}}+4\hat{\mathbf{k}}$

(*v*) $5\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$ तथा $-2\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}$

5. यदि, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ तो दिखाओ कि, या तो $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ या, $\mathbf{b}=\mathbf{c}$ या, **a**, $(\mathbf{b}-\mathbf{c})$ पर लम्ब है।

6. यदि, $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})=0$, तो दिखाओ कि, $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$

7. सिद्ध करो कि, दो सदिश परस्पर लम्बवत् तभी होंगे जबकि,

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2$$

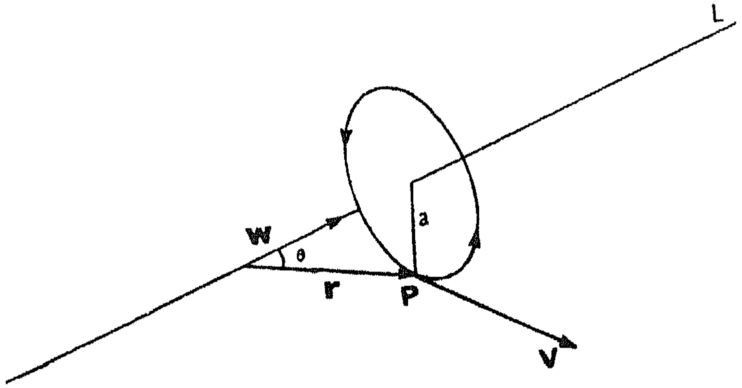
8. त्रिभुज OAB में, कोण AOB=90° है। यदि, P तथा Q, AB के समत्रिभाजन बिन्दु हो तो सिद्ध करो कि,

$$OP^2+OQ^2=\frac{5}{6}AB^2.$$

5.7 सदिश गुणनफल तथा क्रास गुणनफल (Vector Product or Cross Product)

हमें, यह ज्ञात है कि, रेखा L के परितः घूमते हुए चक्र की नेमि पर स्थित बिन्दु P का रैखिक वेग, सदिश V से, निरूपित किया जा सकता है, जिसका कांतिमान रैखिक चाल V है जहाँ पर $V=a\omega$ तथा ω,

कोणीयचाल है (आकृति 5.32 देखें)। चूंकि रेखा L के परित: चक्र का कोणीय वेग, **w** से निरूपित होता है और वृत्त की त्रिज्या $|\mathbf{a}| = |\mathbf{r}| \sin\theta$ से व्यक्त होती है, इसलिए, $|\mathbf{V}| = |\mathbf{w}|\,|\mathbf{r}| \sin\theta$.



आकृति 5·32

ध्यान रखें कि, **v**, **r** तथा **w** दोनों पर लम्ब है। इस प्रकार, सदिश **v**, दो सदिशों **r** तथा **w** से, किसी तरह पूर्ण रूप से निर्धारित हाता है। अब प्रश्न यह है कि यदि **r** तथा **w** दिये हों तो **v** किस प्रकार ज्ञात किया जा सकता है ? इस प्रकार के प्रश्न का उत्तर **r** तथा **w** के सदिश गुणनफल अर्थात्

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$$

से प्राप्त होता है।

इससे, हम निम्नांकित परिभाषा देते हैं।

परिभाषा : 5.7.1. दो सदिशों **a** तथा **b** का **सदिश गुणनफल**, जिसको $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ लिखा जाता हैं, निम्न प्रकार से परिभाषित होता है।

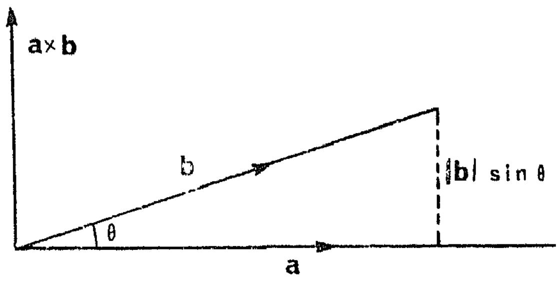
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}| \sin\theta\, \hat{\mathbf{n}} \tag{1}$$

जहाँ θ, **a** तथा **b** के बीच का कोण है, मानक सदिश $\hat{\mathbf{n}}$, दोनों सदिशों **a** तथा **b** पर, लम्ब है और इस प्रकार है कि, **a**, **b**, **n**, दक्षिण हस्त अभिविन्यास (right handed orientation) में हो (दक्षिणहस्त अभिविन्यास से, हमारा तात्पर्य लघुत्तर प्रतिच्छेद कोण पर, **a** से **b** के लिए दक्षिणवर्ती पेंच के घूर्णन से है, जो उसे $\hat{\mathbf{n}}$ की धनात्मक दिशा की ओर उन्मुख करता है। हम, सर्वदा निर्देशांक अक्षों के दक्षिणावर्ती निकाय को ही अपनाते हैं और $\overline{OX}$ से $\overline{OY}$ तक के 90° पर धनात्मक घूर्णन को, एक सदिश की सहायता से, $\overline{OZ}$ की दिशा में प्रदर्शित करते हैं। $\overline{OY}$ से $\overline{OX}$ तक का घूर्णन, एक सदिश की सहायता से, $\overline{ZO}$ की दिशा में प्रदर्शित होगा)।

सदिश गुणनफल के गुण-धर्म (Properties of Vector Product)

I. सदिश गुणनफल $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ का कांतिमान $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ के कांतिमान के बराबर होता है परन्तु उसकी

दिशा $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ की दिशा की विपरीत होती है। इसका कारण यह है कि, दक्षिणावर्ती पेंच इसको $-\mathbf{n}$ की दिशा में उन्मुख करता है।



आकृति 5.33

इससे प्रदर्शित होता है कि, सदिश गुणनफल क्रम-विनिमेय (**commutative**) नहीं है। यह गुण-धर्म, सदिश गुणनफल की प्रतिक्रम विनिमेयता (**anticommutativity**) के नाम से भी जाना जाता है।

II. यदि, $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ समान्तर हों, अर्थात् यदि, $\theta = 0$ तो,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}| \sin 0\ \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0},$$

विलोमतः, यदि,

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ तो $|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}| \sin\theta\ \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$, इसलिए, या तो $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ या, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, या, $\sin\theta = 0$. यदि, $\sin\theta = 0$ तो, $\theta = 0$, या, $\theta = \pi$, अर्थात् $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ समान्तर हैं। विशिष्ट रूप से, $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, होता है, अतः

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{0}}.$$

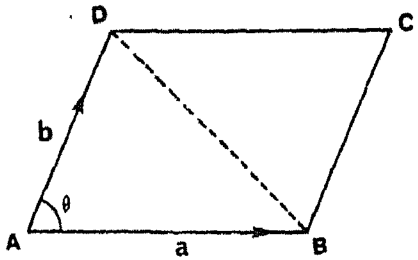
III. यदि, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ अर्थात् यदि, $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ लंबवत् हों तो,

$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|\ \hat{\mathbf{n}}$ और $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ परस्पर लंबवत् सदिशों का दक्षिण-हस्त निकाय बनाते हैं। यदि, $\hat{\mathbf{a}}$ तथा $\hat{\mathbf{b}}$, मात्रक सदिश हों तो, $\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}} = \sin\theta\ \hat{\mathbf{n}}$, विशिष्ट रूप से, यह देखा जा सकता है कि,

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}}\ ;\ \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}};\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}},$$

क्योंकि, अक्ष OX, OY, OZ, सर्वदा दक्षिणहस्त निकाय के रूप में प्रयुक्त होती हैं।

IV माना, ABCD, एक समानान्तर चतुर्भुज है, जैसा कि आकृति 5·34 में दिखाया गया है।



आकृति 5·34

त्रिकोणमिति से, हम जानते हैं कि, एक $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल $\frac{1}{2} | \mathbf{a} | \; | \mathbf{b} | \sin\theta$ होता है। इसलिये, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$$A = | \mathbf{a} \times \mathbf{b} | = | \mathbf{a} | \; | \mathbf{b} | \sin\theta \text{ है}.$$

अर्थात् यदि, किसी समान्तर चतुर्भुज की आसन्न भुजायें a तथा b निरूपित हों तो उसकी संगत भुजाओं की लम्बाई क्रमशः | a | तथा | b | होती है और उसका क्षेत्रफल कांतिमान में, a तथा b के सदिश गुणनफल के बराबर होता है।

सदिश गुणनफल के बीजीय गुण-धर्म

I. सदिश गुणनफल, क्रमविनिमेय नियम का पालन नहीं करता है।
अर्थात्, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \times \mathbf{a}$

II. अदिश के संदर्भ में सदिश गुणनफल सहचारी होता है।
अर्थात्, $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b})$

उपपत्ति : माना, λ धनात्मक है। तब, चूँकि $\lambda \mathbf{a}$ तथा $\lambda \mathbf{b}$, $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ की दिशा में $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ के λ गुने मापांक वाले सदिश हैं, इसलिए

$$\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \lambda(ab \sin\theta \, \hat{\mathbf{n}}) = (\lambda ab) \sin\theta \, \hat{\mathbf{n}}$$

पुनः $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = | (\lambda \mathbf{a}) | \; | \mathbf{b} | \sin\theta \, \hat{n}$

$$= (\lambda ab) \sin\theta \, \mathbf{n}$$

और $\mathbf{a} \times \lambda \mathbf{b} = a(\lambda b) \sin\theta \, \hat{\mathbf{n}} = (\lambda ab) \sin\theta \, \mathbf{n}$

अतः $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b})$

III. सदिश-योग के संदर्भ में सदिश गुणनफल, बंटन-नियम का पालन करता है।
अर्थात् यदि, a, b, c तीन सदिश हों तो,

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

तथा, $(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ को, $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ के घटकों के पदों में, व्यक्त करना उपयोगी होगा। यदि, $\mathbf{a} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}$ तथा $\mathbf{b} = b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}} + b_3\hat{\mathbf{k}}$ हो तो बंटन-नियम के प्रयोग से,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}) \times (b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}} + b_3\hat{\mathbf{k}})$$

$$= a_1b_1\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} + a_1b_2\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} + a_1b_3\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} +$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{\mathbf{i}} + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{\mathbf{j}} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{\mathbf{k}} \tag{1}$$

चूँकि, $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \mathbf{0}, \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}$, इत्यादि, इसलिये, समीकरण 1 को हम निम्न प्रकार लिख सकते हैं:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{2}$$

$\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ के बीच का कोण ज्ञात करने के लिए, हम निम्न प्रकार अग्रसर होते हैं :

हम जानते हैं कि, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab \sin\theta\, \hat{\mathbf{n}}$. तब,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = (ab \sin\theta)^2 (\hat{\mathbf{n}})^2 = (ab)^2 \sin^2\theta$$

इसलिये, $$\sin^2\theta = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2}{(ab)^2} \tag{3}$$

उदाहरण 1 : उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसकी भुजायें सदिशों $\mathbf{a} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ तथा $\mathbf{b} = 3\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}$ से निर्मित हैं।

हल : हम जानते हैं कि, समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ से परिभाषित होता है।

परन्तु, $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{k}}$$

अतः $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |2\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{k}}| = \sqrt{(2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

उदाहरण 2 : दिखाओ कि, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{a}.\mathbf{b})^2}$

हल : चूँकि $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin\theta$, इसलिए,

$$|(\mathbf{a} \times \mathbf{b})|^2 = a^2b^2 \sin^2\theta$$

$$= a^2b^2(1 - \cos^2\theta) = a^2b^2 - a^2b^2\cos^2\theta$$

$$= \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{a}.\mathbf{b})^2$$

दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर, हमें अभीष्ट परिणाम प्राप्त होता है ।

उदाहरण 3 : $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ के समतल के लम्बवत् मात्रक सदिश निर्धारित करो, जहाँ पर, $\mathbf{a}=4\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}}$ तथा $\mathbf{b}=2\hat{\mathbf{i}}-6\hat{\mathbf{j}}-3\hat{\mathbf{k}}$.

हल : हमें ज्ञात है कि, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ के समतल पर लम्ब होता है । तब $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ के समतल के लम्बवत् मात्रक सदिश $\dfrac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}$ होगा ।

समीकरण (2) से,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ 4 & 3 & -1\\ 2 & -6 & -3\end{vmatrix}$$

$$=\hat{\mathbf{i}}\,(-9-6)-\hat{\mathbf{j}}\,(-12+2)+\hat{\mathbf{k}}\,(-24-6)$$

$$=15\hat{\mathbf{i}}+10\hat{\mathbf{j}}-30\hat{\mathbf{k}}$$

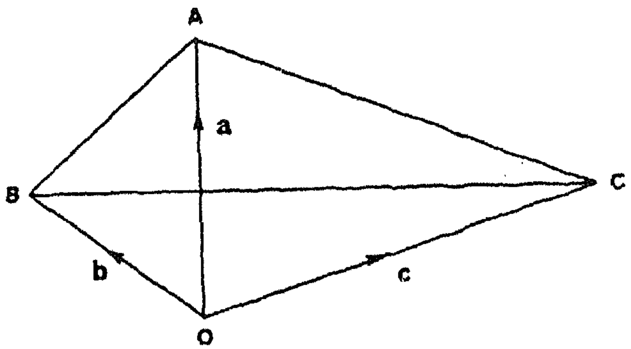
इसलिए, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ के लम्बवत् मात्रक सदिश,

$$\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}=\frac{-15\hat{\mathbf{i}}+10\hat{\mathbf{j}}-30\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{(-15)^2+(10)^2+(-30)^2}}=\frac{-15\hat{\mathbf{i}}+10\hat{\mathbf{j}}-30\hat{\mathbf{k}}}{35}$$

$$=-\frac{3}{7}\hat{\mathbf{i}}+\frac{2}{7}\hat{\mathbf{j}}-\frac{6}{7}\hat{\mathbf{k}}.$$

उदाहरण 4 : दिखाओ कि, A, B, C, शीर्षों वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{1}{2}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})$ है, जहाँ, $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$, A, B, C शीर्षों के क्रमशः स्थिति सदिश हैं ।

(समीकरण (1) का व्यंजक, $\triangle ABC$ का सदिश क्षेत्रफल कहलाता है) इन बिन्दुओं की संरेखिकता की शर्त ज्ञात करो ।



आकृति 5.35

हल : आकृति 5.35 से, हम देखते हैं कि,

$$\mathbf{BC}=\mathbf{OC}-\mathbf{OB}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$$

तथा, $$\mathbf{BA}=\mathbf{OA}-\mathbf{OB}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$$

इसलिए, $\mathbf{BC}\times\mathbf{BA}=(BC)\ (BA)\ (\sin\ \angle ABC)\ \hat{\mathbf{n}}$, जहाँ पर $\hat{\mathbf{n}}$, ABC के समतल के लंबवत् मात्रक सदिश है ।

$$=2\ (\triangle ABC \text{ का सदिश क्षेत्रफल}) \qquad (2)$$

यहाँ, $\frac{1}{2}$ (BC) (BA) sin $\angle ABC=\triangle ABC$ का क्षेत्रफल,

पुनः $\mathbf{BC}\times\mathbf{BA}=(\mathbf{c}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b})$

$$=\mathbf{c}\times\mathbf{a}-\mathbf{c}\times\mathbf{b}-\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{b}\times\mathbf{b}$$

$$=\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{a}\times\mathbf{b} \qquad (3)$$

और $\mathbf{b}\times\mathbf{c}=-\mathbf{c}\times\mathbf{b},\ \mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ तथा $\mathbf{b}\times\mathbf{b}=0$

इसलिये समीकरण (2) तथा (3) से हम देखते हैं कि,

$\triangle ABC$ का सदिश क्षेत्रफल$=\frac{1}{2}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})$

यदि, A, B, C, संरेख बिन्दु हों तो ABC का सदिश क्षेत्रफल शून्य होता है । **अतः बिन्दु तभी संरेख होंगे जबकि,**

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}=0$$

उदाहरण 5 : यदि, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}\neq 0$ तो सिद्ध करो कि $\mathbf{a}+\mathbf{c}=m\,\mathbf{b}$, जहाँ m एक अदिश है ।

हल : यहाँ, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}$

या, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{c}\times\mathbf{b}$ (सदिश गुणनफल के प्रति क्रमविनिमेयता के प्रयोग से)

या, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{c}\times\mathbf{b}=0$

या, $(\mathbf{a}+\mathbf{c})\times\mathbf{b}=0$ (सदिश गुणनफल के बंटन नियम के प्रयोग से)

परन्तु न तो $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ शून्य है और न $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ इसलिए, सदिशों **a**, **b**, **c** में से कोई भी शून्य सदिश नहीं है । इसलिए, सदिश $(\mathbf{a}+\mathbf{c})$, **b** के समान्तर है अर्थात्

$\mathbf{a}+\mathbf{c}=m\,\mathbf{b}$, जहाँ m एक अदिश है और $\mathbf{a}\neq-0$.

यदि, $\mathbf{a}=-\mathbf{c}$ तो $m=0$

प्रश्नावली 5.5

1. माना, $\mathbf{a}=2\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}},\ \mathbf{b}=-\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$ तथा $\mathbf{c}=\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+5\hat{\mathbf{k}}$, तीन सदिश हैं । निम्नांकित को ज्ञात करो :

(*i*) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (*ii*) $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ (*iii*) $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$

(*iv*) $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ (*v*) $\mathbf{c}\times\mathbf{c}$ (*vi*) $\mathbf{a}\times(-\mathbf{b})$

(*vii*) $\mathbf{a}\times 2\mathbf{b}$ (*viii*) $(\mathbf{a}-2\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ (*ix*) $(\mathbf{a}-\mathbf{c})\times\mathbf{c}$

(*x*) $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})$.

2. निम्नांकित सदिशों के लम्बवत् मात्रक सदिश ज्ञात करो :

(i) $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{k}}$ (ii) $\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{k}}$ (iii) $2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}}$

(iv) $\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{k}}$ (v) $\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$

3. उस समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का कांतिमान ज्ञात करो, जिसकी संलग्न-भुजायें निम्नांकित हैं :

(i) $2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$ (ii) $2\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$

(iii) $\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ (iv) $5\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}}, 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{k}}$

(v) $\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}, -\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}}$.

4. दिखाओ कि, $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ और इसका ज्यामितीय निर्वचन भी दो।

5. यदि, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$ तो दिखाओ कि, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$.इसका ज्यामितीय निर्वचन भी दो।

6. त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात करो, जहाँ बिन्दु A, B, C क्रमशः (1, 2, 4), (3, 1, −2), (4, 3, 1) हैं। A, B, C कोणों को भी ज्ञात करो।

7. दिखाओ कि, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$

8. एक संख्यात्मक उदाहरण तथा ज्यामितीय ढंग से भी दिखाओ कि,
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ से $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ का संकेत नहीं मिलता।

9. यदि, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ तथा $\mathbf{a}$, एक शून्य सदिश न हो तो दिखाओ कि, $\mathbf{b} = \mathbf{c}$.

10. माना, **a**, **b**, **c** क्रमशः **BO, CA** तथा **AB** सदिशों को निरूपित करते हैं। दिखाओ कि, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$. त्रिभुज के लिए **ज्या-नियम*** (**sine rule**) का निगमन करो।

5.8 अदिश त्रिक गुणनफल (Scalar Triple Product)

हम, परिच्छेद 5.7 में देख चुके हैं कि दो सदिशों **a** तथा **b** का सदिश गुणनफल $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ होता है। अतः इसके और तीसरे सदिश **c** के संयोग से अदिश गुणनफल $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ या सदिश गुणनफल $\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ प्राप्त किया जा सकता है। वास्तव में, यदि तीन सदिश **a**, **b**, **c** ज्ञात हों तो इन सदिशों का सभी को एक साथ लेकर, सार्थक गुणनफल निम्नांकित में से एक होगा :

---

*ज्या-नियम—इसका उल्लेख निम्नांकित है :

एक त्रिभुज की भुजायें, अपने विपरीत कोणों के ज्या के समानुपाती होती हैं, अर्थात् किसी $\triangle ABC$ के लिये,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

(*i*) $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ (*ii*) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\mathbf{c}$

(*iii*) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ (*iv*) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$

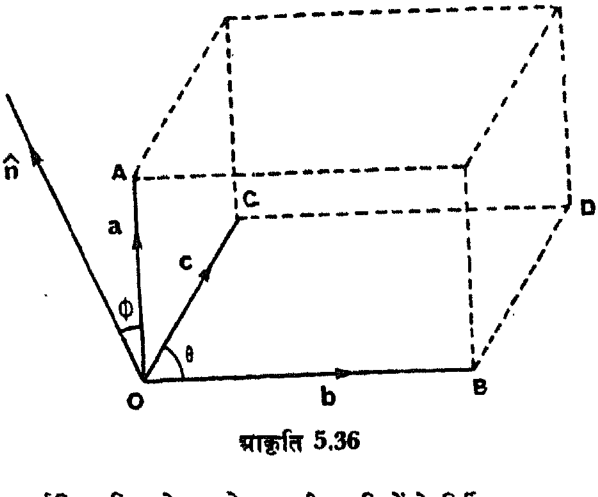
गुणनफल (*i*) तथा (*ii*) **अदिश त्रिक गुणनफल (Scalar triple product)** कहलाते हैं, क्योंकि उनका गुणनफल एक अदिश राशि है, तथा गुणनफल (*iii*) तथा (*iv*), **सदिश त्रिक गुणनफल (vector triple product)** कहलाते हैं क्योंकि उनका गुणनफल एक सदिश राशि है। इस परिच्छेद में, हम अदिश त्रिक गुणनफल पर विचार करेंगे।

यदि, **a**, **b** तथा **c** तीन अशून्य सदिश हों और **b** तथा **c** के बीच कोण θ तथा $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ और **a** के बीच कोण ϕ हो तो **a**, **b** तथा **c** का अदिश त्रिक गुणनफल जो $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ से प्रदर्शित होता है, निम्न प्रकार से दिया जाता है :

$$\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{a}.(bc\sin\theta\,\hat{\mathbf{n}})$$
$$=abc\sin\theta\cos\phi$$

अदिश त्रिक गुणनफल के गुण-धर्म

I. ज्यामितीय ढंग से, $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ का कान्तिमान, $bc\sin\theta$, **b** तथा **c** से बने समान्तर चतुर्भुज OBDC के क्षेत्रफल के बराबर होता है (आकृति5.36 देखें)। तीन सदिश **a**, **b** तथा **c** से निर्मित समान्तर षट्फलक का आयतन, **b** तथा **c** से निर्मित समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल और समान्तर षट्फलक की ऊँचाई के गुणनफलन के बराबर होता है। यह ऊँचाई, $\hat{\mathbf{n}}$ की दिशा में, **a** का घटक होती है और $a\cos\phi$ के बराबर है। तदनुसार, समान्तर षट्फलक का आयतन $abc\sin$ ˜ $\cos\phi$ है।



आकृति 5.36

अर्थात्, एक सर्वनिष्ठ बिन्दु से जाते हुए तीन सदिशों से निर्मित समान्तर षट्फलक का आयतन, अदिश त्रिक गुणनफलन $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ के बराबर होता है।

यदि, $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ धनात्मक हो तो $\cos\phi$ भी धनात्मक होगा और इसलिये यह न्यून कोण होगा। अतः **n** तथा **a**, **b**, तथा **c** से निर्मित समतल के एक ही तरफ विस्तरित होते हैं।

यदि, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, ऋणात्मक होता है तो $\phi, \frac{\pi}{2}$ तथा π के बीच अवस्थित होगा और इसलिए $\hat{\mathbf{n}}$ तथा $\mathbf{a}$, इस समतल के विपरीत दिशा में, विस्तरित होंगे।

इस प्रकार, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ के क्रमश: धनात्मक या ऋणात्मक होने के अनुसार, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, दक्षिण-हस्त या वामहस्त निकाय बनाते हैं।

ठीक इसी प्रकार के तर्क से समान्तर षट्फलक का आयतन $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$ तथा $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ से दिया जाता है। अतः

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$
$$= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}.$$

II. संख्यात्मक उदाहरणों में, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ का मान ज्ञात करने के लिए, निम्नांकित स्वरूप उपयोगी सिद्ध होगा। माना

$$\mathbf{a} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{b} = b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}} + b_3\hat{\mathbf{k}}$$

तथा $$\mathbf{c} = c_1\hat{\mathbf{i}} + c_2\hat{\mathbf{j}} + c_3\hat{\mathbf{k}}.$$

तब, $$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (b_2c_3 - b_3c_2)\,\hat{\mathbf{i}} + (b_3c_1 - b_1c_3)\,\hat{\mathbf{j}} + (b_1c_2 - b_2c_1)\,\mathbf{k}$$

तथा, $$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}) \cdot [(b_2c_3 - b_3c_2)\,\hat{\mathbf{i}} + (b_3c_1 - b_1c_3)\hat{\mathbf{j}} + (b_1c_2 - b_2c_1)\hat{\mathbf{k}}]$$
$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

इसलिए, $$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

III. चूंकि $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times \mathbf{b}$, इसलिए,

$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b})$,

जहाँ दांये पक्ष में, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ का चक्रीय क्रम परिवर्तित हो गया है।

इससे हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि, अदिश त्रिक गुणनफल का चिन्ह घटकों (खण्डों) के चक्रीय क्रम पर निर्भर करता है और उनके बीच बिन्दी तथा क्रास की स्थितियों से स्वतन्त्र होता है।

IV. चूंकि $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = abc \sin\theta \cos\phi$, इसलिए हम देखते हैं कि, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, तभी शून्य होता है जबकि या तो (i) $\theta = 0$, या (ii) $\phi = 90°$। यदि $\theta = 0$, तो सदिश, $\mathbf{b}$ तथा $\mathbf{c}$ समांतर होते हैं। यदि $\phi = 90°$ तो सदिश $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ तथा $\mathbf{c}$ के समतल में अवस्थित होता है अर्थात् तीनों सदिश समतलीय होते हैं। **इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि तीन अशून्य सदिशों का अदिश त्रिक गुणनफल तभी शून्य होता है, जब सदिश समतलीय हैं।**

V. अदिश त्रिक गुणनफल बंटन-नियम का पालन करता है : अर्थात्

$$\mathbf{a}\,.\,[(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{d}+\mathbf{e})]=\mathbf{a}\,.\,(\mathbf{b}\times\mathbf{d})+\mathbf{a}\,.\,(\mathbf{b}\times\mathbf{e})+\mathbf{a}\,.\,(\mathbf{c}\times\mathbf{d})+\mathbf{a}\,.\,(\mathbf{c}\times\mathbf{e})$$

उपपत्ति : बांयें पक्ष में, सदिश गुणनफल के बंटन नियम का प्रयोग करने से हम देखते हैं कि,

$$\begin{aligned}\mathbf{a}.\ (\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{d}+\mathbf{e}) &= \mathbf{a}.[(\mathbf{b}\times\mathbf{d})+(\mathbf{b}\times\mathbf{e})+(\mathbf{c}\times\mathbf{d})+(\mathbf{c}\times\mathbf{e})]\\ &=\mathbf{a}\,.\,(\mathbf{b}\times\mathbf{d})+\mathbf{a}\,.(\mathbf{b}\times\mathbf{e})\\ &\quad+\mathbf{a}\,.\,(\mathbf{c}\times\mathbf{d})+\mathbf{a}\,.\,(\mathbf{c}\times\mathbf{e})\\ &=\text{दायां पक्ष}\end{aligned}$$

उदाहरण 1 : यदि, सदिश $\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}},\ 2\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}}$ तथा $\lambda\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}+\lambda\hat{\mathbf{k}}$ समतलीय हों तो λ का मान बताओ।

हल : तीन सदिश, जब समतलीय होते हैं, तो उनका अदिश त्रिक गुणनफल शून्य होता है अर्थात्

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ \lambda & -1 & \lambda\end{vmatrix}=0$$

या, $\quad 1(\lambda-1)+1(2\lambda+\lambda)+1(-2-\lambda)=0$

या, $\quad \lambda-1+3\lambda-2-\lambda=0,\quad$ या, $\lambda=1$

अतः यदि $\lambda=1$, हो तो तीनों सदिश समतलीय होंगे।

उदाहरण 2 : उस समान्तर षट्फलक का आयत ज्ञात करो, जिसके सिरे, $2\hat{\mathbf{i}}-3\hat{\mathbf{j}}+4\hat{\mathbf{k}},\ \hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}}$ तथा $3\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{k}}$ से निरूपित हैं।

हल : हम जानते हैं कि, समान्तर षट्फलक, जिसकी भुजायें सदिश **a**, **b**, **c** से दी गई हैं, का आयतन $\mathbf{a}\,.\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ है। अतः $\mathbf{a}=2\hat{\mathbf{i}}-3\hat{\mathbf{j}}+4\hat{\mathbf{k}},\ \mathbf{b}=\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}}$ तथा $\mathbf{c}=3\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{k}}$ से निर्मित समान्तर-षट्फलक का आयतन :

$$\begin{aligned}&=\begin{vmatrix}2 & -3 & 4\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}\\ &=2(4-1)+3(2+3)+4(-1-6)\\ &=6+15-28\\ &=-7\end{aligned}$$

या, $\quad \mathbf{a}\,.\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=-7$

यहाँ पर ऋण चिन्ह, यह सूचित करता है कि सदिश **a**, **b**, **c** दक्षिणावर्ती निकाय नहीं बनाते। इस प्रकार, समान्तर षट्फलक का आयतन 7 इकाई है।

उदाहरण 3 : दिखाओ कि,

$$\hat{\mathbf{i}}\,.\,(\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}})=\hat{\mathbf{j}}\,.\,(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}})=\hat{\mathbf{k}}\,.\,(\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}})=1,$$

तथा, $\quad \hat{\mathbf{i}}\,.\,(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{j}})=\hat{\mathbf{j}}\,.\,(\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{k}})=\hat{\mathbf{k}}\,.\,(\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{i}})=-1$

हल : हम देखते हैं कि,

$$\hat{\mathbf{i}}\,.\,(\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}})=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1(1-0)+0+0=1$$

$$\hat{\mathbf{j}}\,.\,(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}})=\begin{vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}=0-1(0-1)+0=1$$

$$\hat{\mathbf{k}}\,.\,(\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}})=\begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=0+0+1(1-0)=1$$

$$\hat{\mathbf{i}}\,.\,(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{j}})=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}=1(0-1)+0+0=-1$$

इसी तरह, $\hat{\mathbf{k}}\,.\,(\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{i}})=-1=\hat{\mathbf{j}}.\,(\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{k}})$

प्रश्नावली 5.6

1. उस समान्तर षट्फलक का आयतन ज्ञात करो, जिसकी भुजायें निम्नांकित सदिशों से निरूपित हैं :

   (*i*) $11\hat{\mathbf{i}},\ 2\hat{\mathbf{j}},\ 13\hat{\mathbf{k}}$

   (*ii*) $\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}},\ \hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}},\ 5\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}$

   (*iii*) $-12\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{k}},\ 3\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}},\ 2\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}-15\hat{\mathbf{k}}$

   (*iv*) $\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}},\ \hat{\mathbf{k}},\ 3\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{k}}.$

2. किन्हीं दो सदिशों **a** तथा **b** के लिए, सिद्ध करो कि, $\mathbf{a}\,.\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0.$ क्या $\mathbf{b}\,.\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$ सम्भव है ?

3. यदि, **a**, **b** तथा **c** एक दूसरे के लम्बवत् हों तो दिखाओ कि,

   $$[\mathbf{a}\,.\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]^2=a^2b^2c^2.$$

4. दिखाओ कि,

   $$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\,.\,[(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{c}+\mathbf{a})]=2\mathbf{a}.\ (\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

5.9 शब्द **सदिश (Vector)** लेटिन शब्द जिसका अर्थ 'ले जाना' होता है, से व्युत्पन्न हुआ है। गणित के अनेकों आधारभूत विचारों के समान ही सदिश की धारणा भौतिकी में उत्पन्न प्रश्नों के अन्वेषण से विकसित हुई। एच० जी० ग्रासमैन (H. G. Grassmann) [1809-1877] एवं डब्लू आर० हेमिल्टन (W. H. Hamilton) [1805-1865] के शोध ने इस विषय के विकास पर बहुत प्रभाव डाला।

1844 में ग्रासमैन ने अपने शोध कार्य को **Lineale Ausdehnungslehre** में प्रकाशित किया एव हैमिल्टन ने 1853 में **चतुष्टयों (Quaternions) पर लेख** प्रकाशित किया। ग्रासमैन और हैमिल्टन की पद्धतियाँ आधुनिक सदिश विश्लेषण की जन्मदाता मानी जा सकती हैं। परन्तु न केवल हैमिल्टन तथा ग्रासमैन की पद्धतियाँ भौतिक विज्ञानी या व्यावहारिक गणितज्ञों की आवश्यकता को पूरा न कर सकी क्योंकि ये दोनों पद्धतियाँ साधारण परिकलनों के लिए बहुत जटिल थीं। उस समय के गणितज्ञों के विचार से ऐसी पद्धति की आवश्यकता थी जिनके द्वारा प्रकृति के तथ्यों की जानकारी में वृद्धि हो। विभिन्न देशों के गणितज्ञों ने इस दिशा में कार्य आरम्भ किया और अमेरिकन गणितज्ञ विलार्ड गिब्स (Willard Gibbs) [1839-1903] इसमें आगे आए। 1881 तथा 1884 में गिब्स ने सदिश विश्लेषक के मूल तत्त्व नामक प्रपत्र प्रकाशित किया। इस विषय पर यह प्रथम पुस्तक थी जिसने सदिश पर विधिवत एवं संक्षिप्त विवरण दिया। परन्तु, सदिश के अनुप्रयोगों को निरूपित करने का श्रेय ओ० हैवसाइड (O. Heavside) [1850-1925] को दिया जाता है। औरों में पी० जी० टेट (P. G. Tait) [1831-1901] जो कि हैमिल्टन के एक शिष्य थे, ने इस विषय पर उल्लेखनीय कार्य किया है।

इस शताब्दी के इटालियन गणितज्ञों आर० मारकोलोगो एवं सी. बुरालिफोर्टी (C. Buraliforti) [1861-1931] ने क्षेत्र में वृहत कार्य किया है। उन्होंने Elements de Calcul Vectorial (Paris, 1910) और Analyse Vectorielle Generele (Paris, 1912) प्रकाशित किये हैं। पहले में सरल सदिश विश्लेषण है एवं दूसरे में अधिक विस्तृत सदिश विश्लेषण है।

अध्याय 6

सारणिक तथा आव्यूह (मैट्रिक्स)

6.1 सारणिक

समीकरणों के निकाय

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\,x + a_{12}\,y &= b_1 \\ a_{21}\,x + a_{22}\,y &= b_2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

पर विचार कीजिये जहाँ गुणांक a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} तथा b_1, b_2 (वास्तविक या मिश्रित) संख्याएँ हैं।

x तथा y के लिए, हल करने पर हमें

$$x = \frac{b_1\,a_{22} - b_2\,a_{12}}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}$$

तथा
$$y = \frac{a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}$$

प्राप्त होता है यदि $(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})$ शून्य न हो। हर का, यह व्यंजक (1) में दिए हुए प्रकार के समीकरणों के हल में, महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है। संख्या $(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})$ एक सारणिक कहलाता है और इसे

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

के रूप में लिखा जाता है।

उपर्युक्त सारणिक में दो पंक्तियाँ तथा दो स्तंभ हैं। यह कोटि 2 का सारणिक कहलाता है। इस प्रकार दी हुई परिभाषा से यह स्पष्ट है कि यदि a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} की स्थितियाँ बदल दी जाएँ तो सारणिक भी बदल जाता है। उदाहरणार्थ, सारणिक

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

$(a_{12}\,a_{21} - a_{11}\,a_{22})$ के बराबर होगा।

परिभाषा 6.1.1 व्यंजक

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

जिसका मान $(a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21})$ है, जहाँ $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ (वास्तविक या मिश्रित) संख्याएँ या फलन (जिनके मान वास्तविक या मिश्रित हों) हैं, **कोटि 2 का सारणिक** कहलाता है।

यदि हम तीन अज्ञात राशि वाले तीन समीकरणों के निकाय को हल करें तो उपर्युक्त रीति का अनुसरण करने पर हम कोटि 3 का सारणिक प्राप्त करते हैं, अर्थात् ऐसा सारणिक, जिसमें तीन पंक्तियाँ तथा तीन स्तम्भ हों। उदाहरणार्थ निम्नलिखित समीकरणों के निकाय पर विचार कीजिये—

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

x, y तथा z के लिए हल करने पर हमें

$$x = \frac{b_1(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - b_2(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + b_3(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}{a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})},$$

$$y = \frac{b_1(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) - b_2(a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33}) + b_3(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})}{a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})},$$

$$z = \frac{b_1(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - b_2(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) + b_3(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{11}(a_{22}a_{32} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}$$

प्राप्त होता है यदि

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \qquad (3)$$

शून्य न हो। इस व्यंजक में x, y, z के हर को निम्नलिखित रूप में लिखते हैं।

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

तथा इसे **कोटि 3 का सारणिक** कहते हैं क्योंकि इसमें तीन पंक्तियाँ और तीन स्तम्भ हैं।

यह देखने योग्य है कि व्यंजक (3) निम्न प्रकार भी लिखा जा सकता है।

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_1\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

इस प्रकार हमने कोटि 3 का सारणिक कोटि 2 के सारणिक केरूप में परिभाषित किया है। अतः

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}) - a_{12}\,(a_{21}\, a_{33} - a_{23}\, a_{31}) + a_{13}\,(a_{21}\, a_{32} - a_{22}\, a_{31}) \qquad (6)$$

उपर्युक्त रीति का अनुसरण करने पर इस प्रकार हम कोटि 4 के सारणिक को कोटि 3 के सारणिक के रूप में परिभाषित कर सकते हैं। सामान्यतः हम कोटि n के सारणिक को जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक $\geqslant 2$ है कोटि $(n-1)$ के सारणिक के रूप में परिभाषित कर सकते हैं।

(6) के दक्षिण पक्ष में दिए व्यंजक को सारणिक

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

का प्रसार कहा जाता है। ध्यान दीजिये कि व्यंजक (6) में, कोष्ठक के पूर्व पद, जैसे a_{11}, a_{12} तथा a_{13} वामपक्ष के सारणिक के प्रथम पंक्ति के सदस्य हैं। हम कहते हैं कि प्रथम पंक्ति का उपयोग करते हुए सारणिक का प्रसार किया गया है। यह भी ध्यान देने योग्य है कि a_{11}, a_{12} तथा a_{13} पदों को क्रमशः धन, ऋण तथा धन चिह्न के साथ निर्दिष्ट किया है अर्थात् उन्हें धन चिह्न से आरम्भ करके विकल्पतः धन तथा ऋण चिह्न के साथ निर्दिष्ट किया जाता है। वास्तव में, यदि इन पदों के पादकों (subscripts) का योग सम संख्या हो तो हम धन चिह्न निर्दिष्ट करते हैं और यदि विषम संख्या हो तो हम ऋणं चिह्न निर्दिष्ट करते हैं। उदाहरणार्थ, यदि सारणिक का प्रसार प्रथम स्तंभ लेते हुए किया जाये तो a_{21} के साथ ऋण चिह्न और a_{31} के साथ धन चिह्न आयेगा। सारणिक को किसी विशेष पंक्ति या स्तंभ से प्रसारित करने का अर्थ, उसका मान निकालना है। सारणिक का प्रसार उसके किसी भी पंक्ति या स्तंभ से किया जा सकता है। यह ध्यान देने योग्य है कि हमें सारणिक का एक ही मान प्राप्त होता है। दूसरे शब्दों में सारणिक का मान निश्चित होता है। अब जब हम किसी विशेष पंक्ति या स्तंभ को लेकर सारणिक का प्रसार करते हैं तो हम पंक्ति का स्तंभ या प्रथम अवयव उचित चिह्न के साथ लिखते हैं तथा जिस पंक्ति तथा स्तंभ में अवयव आता है उस पंक्ति तथा स्तंभ को विलुप्त करने पर जो सारणिक प्राप्त होता है उस सारणिक से अवयव को गुणा कर देते हैं। इस विधि को उस समय तक दुहराते हैं जब तक पंक्ति या स्तंभ के सभी अवयव समाप्त नहीं हो जाते। इस प्रकार प्राप्त व्यंजक सारणिक का मान कहलाता है।

इस अध्याय में हम उन सारणिकों का जिनकी कोटि 3 से अधिक नहीं होगी, अध्ययन करेंगे। परन्तु सारणिकों के जिन गुण धर्मों को हम यहाँ सिद्ध करेंगे, वे उचित संशोधन द्वारा, किसी भी कोटि के सारणिक के लिए सत्य सिद्ध होंगे।

हमने देखा है कि कोटि 2 की सारणिक

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

का मान $(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})$ है। व्यवस्थित रूप में इस विधि को तीरों की सहायता से निम्न प्रकार से दर्शाया जा सकता है।

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \searrow\!\!\!\swarrow & \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})$$

उदाहरण 1 : निम्न सारणिक का मान निकालिये :

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$$

हल : उपर्युक्त नियम से

सारणिक $A = 3 \times 5 - 2 \times 6 = 15 - 12 = 3$

उदाहरण 2 : निम्न सारणिक का मान निकालिए

$$D=\begin{vmatrix} (x-1) & 2 \\ x^2 & (x+1) \end{vmatrix}$$

हल : पुनः उपर्युक्त नियम से

$$D=(x-1)\,(x+1)-2(x^2)=x^2-1-2x^2=-(x^2+1)$$

हमने देखा है कि

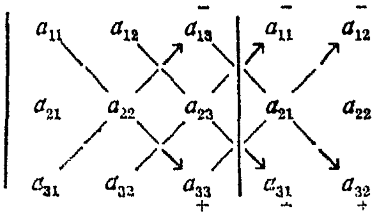
$$\text{सारणिक}\quad A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\left(a_{22}\,a_{33}-a_{23}\,a_{32}\right)-a_{12}\left(a_{21}\,a_{33}-a_{23}\,a_{32}\right)+a_{13}\left(a_{21}\,a_{32}-a_{22}\,a_{31}\right)$$

$$=a_{11}\,a_{22}\,a_{33}-a_{11}\,a_{23}\,a_{32}-a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$
$$+a_{12}\,a_{23}\,a_{31}+a_{13}\,a_{21}\,a_{32}-a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$$

तृतीय कोटि के सारिणक को हल करने की एक सुन्दर तथा सुगम युक्ति निम्नांकित है । इसको, हम इस प्रकार लिखते हैं :



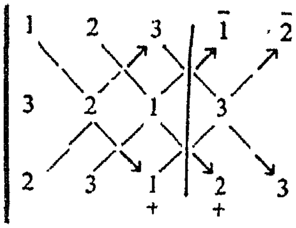
(7)

और तब, मुख्य विकर्ण के समान्तर विकर्णों के अनुगुणनफलों के योग में से बांये से दांये जाने वाले विकीर्णों के अनुगुणनफलों के योग को घटाते हैं । यहां पर, यह ध्यान देने योग्य है कि, इस प्रक्रिया को पूर्ण करने के लिए दो स्तम्भों की आवृत्ति होती है । सावधानी : यह विधि कोटि 4 या उससे अधिक कोटि वाले सारणियों के लिये उपयुक्त नहीं है ।

उदाहरण के लिए यदि हम सारणिक

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

का प्रसार (7) की सहायता से करें तो हमें



$2\;=(2+4+27)-(12+3+6)=12$

प्राप्त होता है ।

(6) में दिया हुआ सारणिक A का प्रसार, प्रथम पंक्ति के प्रयोग से ज्ञात किया गया है। यह सत्यापित किया जा सकता है कि, यही प्रसार किसी दूसरे पंक्ति या स्तम्भ के प्रयोग से भी मिलता है। उदाहरणस्वरूप,

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{32} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$$

का प्रसार, तृतीय स्तम्भ के प्रयोग से, करने पर हम देखते हैं कि,

$$A = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{42} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{25} a_{31}) - a_{23} (a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31}) + a_{33} (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})$$

$$= a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{23} a_{11} a_{32} + a_{23} a_{12} a_{31} + a_{33} a_{11} a_{22} - a_{33} a_{12} a_{21}$$

जो प्रसार (6) के समान है, केवल पदों का विन्यास भिन्न है।

यहाँ पर, यह ध्यान रखने योग्य है कि, प्रसार (5) ज्ञात करने के लिये पद a_{11} का गुणा, प्रथम पंक्ति तथा स्तम्भ, जिसमें a_{11} अवस्थित है, को विलुप्त करने पर प्राप्त, सारणिक से करते हैं। इसी प्रकार, पद a_{12} को प्रथम पंक्ति तथा द्वितीय स्तम्भ को विलुप्त करने से प्राप्त सारणिक से गुणा करते हैं और इसी तरह अन्य पदों के लिये भी। पदों को विकल्पतः धन तथा ऋण चिन्ह के साथ लिखा जाता है।

अवयव a_{11} वाली पंक्ति तथा स्तम्भ को विलुप्त करने पर, जो सारणिक प्राप्त होता है, उसे a_{11} का **उपसारणिक (Minor)** कहते हैं और उसे M_{11} से प्रदर्शित करते हैं। इसी तरह, a_{12} का उपसारणिक M_{12} से प्रदर्शित किया जाता है और वह निम्नांकित है,

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ इत्यादि।}$$

जब, उपसारणिक M_{ij}, जहाँ $i=1, 2, 3$ तथा $j=1, 2, 3$ को $(-1)^{i+j}$ से गुणा किया जाता है तो, उसे a_{ij} का **सहखण्ड (cofactor)** कहते हैं तथा उसे C_{ij} से प्रदर्शित किया जाता है।
इस प्रकार,

$$C_{ij} - (1=)^{i+j} M_{ij}$$

उदाहरणस्वरूप, तृतीय कोटि के सारणिक

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ में}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad \text{इत्यादि}$$

प्रसार (5) को निम्नांकित प्रकार से भी लिखा जा सकता है,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13} = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13} \quad (8)$$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$ के सभी विभिन्न अवयवों के सहखंडों को ज्ञात करो।

$C_{11}=1$ का सहखण्ड $=(-1)^{1+1}$ का उपसारणिक $=M_{11}=4$

$C_{12}=3$ का सहखण्ड $=(-1)^{1+2}$ 3 का उपसारणिक $=M_{12}=-(-2)=2$

$C_{21}=(-2)$ का सहखण्ड $=(-1)^{2+1}(-2)$ का उपसारणिक $=-M_{21}=-(3)=-3$

$C_{22}=4$ का सहखण्ड $=(-1)^{2+2}$ .4 का उपसारणिक $=M_{22}=1$

सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 6 \\ 2 & -7 & 9 \end{vmatrix}$ के सभी विभिन्न सहखण्डों को ज्ञात करो।

हम देखते हैं कि,

$$C_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -7 & 9 \end{vmatrix}, C_{13}=-\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}, C_{12}=\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}$$

$$C_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 9 \end{vmatrix}, C_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}, C_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}$$

$$C_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}, C_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} \text{ और } C_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

: मान बताओ,

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

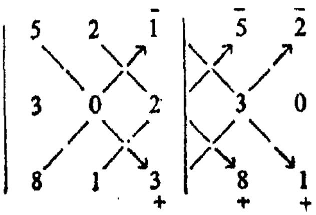
(8) के प्रयोग से,

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 5\,(0\times3-2\times1)-2\,(3\times3-2\times8)+1\,(3\times1-0\times8)$$

$$= -10+14+3=7$$

तथा (7), अर्थात्



के प्रयोग से, सारणिक का मान ज्ञात करने पर, हम देखते हैं कि

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5\times0\times3-5\times2\times1+2\times2\times8-2\times3\times3+1\times3\times1-1\times0\times8$$

$$= -10+32-18+3=7$$

उदाहरण 6 : मान बताओ,

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

हल : प्रथम पंक्ति के अवयवों के प्रयोग से सारणिक का विस्तार करने पर, हम देखते हैं कि,

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= x\,(3\times6-3\times4)-y\,(1\times6-3\times2)+z\,(1\times4-3\times2)$$

$$=6x-2z$$

निम्नलिखित रैखिक समीकरणों पर विचार करें

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \qquad (9)$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \qquad (10)$$

$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \qquad (11)$$

(10) तथा (9) को क्रमशः c_1 तथा c_2 से गुणा करके एक दूसरे से घटाने पर हम देखते हैं कि,

$$(a_1c_2-a_2c_1)\,x+(b_1c_2-b_2c_1)\,y=(d_1c_2-d_2c_1) \qquad (12)$$

इसी प्रकार, (10) तथा (11) से

$$(a_2c_3-a_3c_2)\,x+(b_2c_3-b_3c_2)\,y=(d_2c_3-d_3c_2) \qquad (13)$$

(12) तथा (13) से,

$$x=\frac{d_1b_2c_3+d_2b_3c_1+d_3b_1c_2-d_3b_2c_1-d_2b_1c_3-d_1b_3c_2}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2} \qquad (14)$$

$$y=\frac{a_1d_2c_3+a_2d_3c_1+a_3d_1c_2-a_3d_2c_1-a_2d_1c_3-a_1d_3c_2}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2} \qquad (15)$$

x तथा y के इन मानों को (9) में रखने पर,

$$z=\frac{a_1b_2d_3+a_2b_3d_1+a_3b_1b_2-a_3b_2d_1-a_2b_1d_3-a_1b_3d_2}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2} \qquad (16)$$

जहाँ x, y तथा z के हर शून्य नहीं है।

समीकरण (14), (15) तथा (16) को ध्यानपूर्वक देखने पर, हम निम्नांकित तथ्य प्राप्त करते हैं :

(a) सबके हर एक ही हैं और उनमें निकाय (9)—(11) की अज्ञात राशियों के केवल गुणांक हैं।

(b) अंश और हर में अन्तर केवल d [(9)—(11) समीकरण निकाय की अचर संख्या] के स्थान पर अन्तर होता है, जो x, y तथा z के मानों के अनुसार a, b या c की जगह प्रतिस्थापित होता है।

(c) समीकरण (14) के अंश का व्यंजक, निम्नांकित सारणिक

$$D_1=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ का प्रसार है,

(15) तथा (16) में यह क्रमशः

$$D_2=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

तथा $$D_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$ का प्रसार है।

(14), (15) तथा (16) के हरों के सभी व्यंजक, सारणिक

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ के प्रसार हैं।

इसलिए, (9) से (11) तक के रैखिक समीकरण निकाय का हल निम्नांकित प्रकार से दिया जाता है,

$$x=\frac{D_1}{D},\ y=\frac{D_2}{D} \text{ तथा } z=\frac{D_3}{D} \tag{17}$$

युगपत रैखिक समीकरणों के हल करने की इस विधि को क्रैमर-नियम (**Cramer's Rule**) कहते हैं। हमने तीन समीकरणों के निकाय के लिये इसे पहले ही समझा दिया है। किन्हीं भी सीमित क्रमों के समीकरणों के हल के लिये इसी प्रकार के नियम् को प्रयुक्त किया जा सकता है।

उपर्युक्त निकाय, (9) – (11) में यदि

$d_1=d_2=d_3=0$ तथा $D\neq 0$ हों तो समीकरणों के निकाय का हल केवल तुच्छ हल $x=y=z=0$ होगा।

यह भी ध्यान रखें कि, यदि रैखिक समीकरण निकाय के गुणांकों का सारणिक शून्य के बराबर हो तो क्रैमर-नियम प्रयुक्त नहीं होता है (क्यों) ?

यदि निकाय, (9)—(11), में $D=0$ परन्तु D_i कम से कम एक $i=1, 2, 3$ के लिए शून्य नहीं है तो निकाय का कोई भी हल नहीं होगा।

उदाहरण 7 : समीकरण-निकाय को हल करो

$$3x-4y=1$$
$$2x-7y=3$$

हल : क्रैमर-नियम से,

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}}=\frac{-7+12}{-21+8}=-\frac{5}{13}$$

तथा

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}}=\frac{9-2}{-21+8}=-\frac{7}{13}$$

उदाहरण 8 : समीकरण-निकाय को हल करो—

$$5t-s+4u=5$$
$$2t+3s+5u=2$$
$$5t-2s+6u=-1$$

हल : क्रैमर-नियम से

$$t=\frac{\begin{vmatrix}5 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 5\\ -1 & -2 & 6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 5\\ 5 & -2 & 6\end{vmatrix}},\ s=\frac{\begin{vmatrix}5 & 5 & 4\\ 2 & 2 & 5\\ 5 & -1 & 6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 5\\ 5 & -2 & 6\end{vmatrix}},\ u=\frac{\begin{vmatrix}5 & -1 & 5\\ 2 & 3 & 2\\ 5 & -2 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 5\\ 5 & -2 & 6\end{vmatrix}}$$

परन्तु,

$$\begin{vmatrix}5 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 5\\ 5 & -2 & 6\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}3 & 5\\ -2 & 6\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -2 & 6\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 3 & 5\end{vmatrix}$$
$$=5\ (18+10)-2\ (-6+8)+5\ (-5-12)$$
$$=140-4-85=51,$$

तथा
$$\begin{vmatrix}5 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 5\\ -1 & -2 & 6\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}3 & 5\\ -2 & 6\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2 & 5\\ -1 & 6\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{vmatrix}$$
$$=5\ (18+10)+1\ (12+5)+4\ (-4+3)$$
$$=140+17-4=153$$

इसलिये, $t=\frac{153}{51}=3$

इसी तरह $s=2$

तथा $u=-2$

उदाहरण 9 : हल करो—

$$2x+3y=0$$
$$2x-3y=0$$

हल : हम देखते हैं कि,

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-12\neq 0$$

परन्तु,

$$D_1=\begin{vmatrix}0 & 3\\ 0 & -3\end{vmatrix}=0 \text{ तथा } D_2=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0$$

इसलिये, $x=0=y$ । अतः निकाय का हल, तुच्छ हल, $x=y=0$ है ।

उदाहरण 10 : हल करो

$$x+y+3z=6$$
$$x-3y-3z=-4$$
$$5x-3y+3z=8$$

हल : चूँकि

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -3 & -3\\ 5 & -3 & 3\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-3 & -3\\ -3 & 3\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & 3\\ -3 & 3\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}1 & 3\\ -3 & -3\end{vmatrix}=0$$

तथा

$$D_1=\begin{vmatrix}6 & 1 & 3\\ -4 & -3 & -3\\ 8 & -3 & 3\end{vmatrix}=-12\neq 0$$

इसलिए क्रैमर-नियम के बाद दी गयी टिप्पणी के अनुसार इस निकाय का कोई हल नहीं है।

यह ध्यान रखने योग्य बात है कि यदि D=0 हो तो यह आवश्यक नहीं कि इस प्रकार के निकाय का कोई हल न हो। वास्तविकता में ऐसा हो सकता है कि इस प्रकार के निकाय के अनन्त हल हों जैसा कि नीचे दिखाया गया है।

उदाहरण 11 : हल करो

$$2x-y+z=4$$
$$x+3y+2z=21$$
$$3x+2y+3z=16$$

हल : उपर्युक्त निकाय के गुणांकों का सारणिक निम्न होगा।

$$D=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 3\end{vmatrix}=0 \text{ तथा, } D_1=\begin{vmatrix}4 & -1 & 1\\ 12 & 3 & 2\\ 16 & 2 & 3\end{vmatrix}=0$$

इन तथ्यों के आधार पर यह निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता कि इस निकाय का कोई हल नहीं है। इसलिए हम इसकी और जाँच करेंगे।

x को विलुप्त करने के लिए हम दूसरे समीकरण को क्रमशः 2 तथा 3 से गुणा करते हैं। तदुपरान्त समीकरण एक तथा समीकरण तीन से घटाने पर हमें निम्नलिखित तीन समीकरण प्राप्त होते हैं।

$$-7y-3z=-20$$
$$-7y-3z=-20$$
$$x+3y+2z=-20$$

चूँकि दो समीकरण समान हैं, अतः हमें केवल

$$x+3y+2z=12 \qquad\qquad x+3y=12-2z$$
$$-7y-3z=-20 \qquad \text{या} \qquad 7y=20-3z$$

समीकरणों को हल करने की आवश्यकता है।

इन समीकरणों का हल तभी प्राप्त किया जा सकता है जबकि हम z का कोई भी मान निर्धारित करें। हम x तथा y का निम्न मान निकालते हैं।

$$y=\frac{20-3z}{7} \text{ तथा } x=12-2z-3y \text{ या } x=\frac{24-5z}{7}$$

यदि हम x तथा y के इन मानों को उपर्युक्त समीकरणों में प्रतिस्थापित करें तथा z को कोई भी मान दें तो इनके ये मान उपर्युक्त समीकरणों को संतुष्ट करेंगे।

उदाहरण के लिए $z=2$, $x=2$, $y=2$ तथा $z=-5$, $x=7$, $y=5$ उपर्युक्त समीकरणों के विशिष्ट हल हैं।

6.2 सारणिकों के गुण-धर्म (Properties of Determinants)

इस परिच्छेद में, हम सारणिकों के कुछ महत्त्वपूर्ण गुण धर्मों का उल्लेख तथा प्रतिपादन करेंगे। ये गुण-धर्म सारणिकों के मान निकालने में सहायक सिद्ध होंगे। इनको हम कोटि 3 के सारणिकों के लिये सिद्ध करेंगे, परन्तु यह किसी भी कोटि के सारणिकों के लिए सत्य होंगे।

प्रमेय *6.2.1* : यदि किसी सारणिक की पंक्तियों को स्तंभों में तथा स्तंभों को पंक्तियों में परिवर्तित किया जाय तो सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है।

उपपत्ति : माना $A=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

तब,

$$A=a_1\ (b_2c_3-b_3c_2)-a_2\ (b_1c_3-b_3c_1)+a_3\ (b_1c_2-b_2c_1)$$

यदि, पंक्तियों को स्तम्भों में परिवर्तित करने पर A से प्राप्त सारणिक को A' से प्रदर्शित किया जाय तो सारणिक का प्रसार प्रथम स्तम्भ से ज्ञात करने पर,

$$A'=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\ (b_2c_3-b_3c_2)-a_2\ (b_1c_3-b_3c_1)+a_3\ (b_1c_2-b_2c_1)$$

अतः, $A=A'$

प्रमेय *6.2.2* : किसी सारणिक के, दो संलग्न पंक्तियों या स्तम्भों का विनिमय करने पर सारणिक का चिन्ह परिवर्तित हो जाता है।

उपपत्ति : माना, $A=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

तब, $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\ (b_2c_3-b_3c_2)-a_2\ (b_1c_3-b_3c_1)+a_3\ (b_1c_2-b_2c_1)$

माना, पहली और दूसरी पंक्तियों के विनिमय से सारणिक A' प्राप्त होता है। तब,

$$A'=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=b_1\ (a_2c_3-a_3c_2)-b_2\ (a_1c_3-a_3c_1)+b_3\ (a_1c_2-a_2c_1)$$

उपरोक्त समीकरण के दायें पक्ष में, पदों का पुनर्विन्यास करने पर हम देखते हैं कि,

$A'=-a_1\ (b_2c_3-b_3c_2)+a_2\ (b_1c_3-b_3c_1)+a_3\ (b_1c_2-b_2c_1)$

अर्थात्

$$A=-A'$$

प्रमेय *6.2.3* : यदि, किसी सारणिक की दो पंक्तियाँ या स्तम्भ समरूप हों तो उस सारणिक का मान शून्य होता है।

उपपत्ति : माना, सारणिक की दूसरी तथा तीसरी पंक्तियाँ समरूप हैं। अर्थात्, माना

$$A=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

माना, द्वितीय तथा तृतीय पंक्तियों के विनिमय से प्राप्त, सारणिक A′ है। तब, सारणिक मान स्वतः अपरिवर्तित रहता है, परन्तु प्रमेय 6.2.2 से इसका मान $-A$ है। अर्थात् $A'=-A$

अतः $A=-A$ या $2A=0$

इसलिये, $A=0$

प्रमेय *6.2.4* : यदि, एक सारणिक की एक पंक्ति या स्तम्भ के प्रत्येक अवयव को एक ही गुणनखण्ड से गुणा किया गया हो, तो सारणिक, उस गुणनखण्ड से गुणा किया हुआ होता है।

उपपत्ति : माना,

$$A=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

और A के प्रथम स्तम्भ के अवयवों को अचर संख्या k से गुणा करने पर प्राप्त सारणिक A′ है।

तब, $$A'=\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

A′ का प्रथम स्तम्भ से प्रसार करने पर,

$$A'=ka_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-ka_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+ka_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$=ka_1c_{11}+ka_2c_{21}+ka_3c_{31}$, (8) से

$=k\,(a_1c_{11}+a_2c_{21}+a_3c_{31})$

$=ka$

प्रमेय *6.2.5* : सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

उपपत्ति : वाम पक्ष से सारणिक का प्रथम स्तम्भ से प्रसार करने पर, हम देखते हैं कि,

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=(a_1+\alpha_1)\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-(a_2+\alpha_2)\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+(a_3+\alpha_3)\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1+\alpha_1)\,C_{11}+(a_2+\alpha_2)\,C_{21}+(a_3+\alpha_3)\,C_{31}$$

$$=(a_1C_{11}+a_2C_{21}+a_3C_{31})+(\alpha_1C_{11}+\alpha_2C_{21}+\alpha_3C_{31})$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

प्रमेय *6.2.6* : यदि, सारणिक की एक पंक्ति के प्रत्येक अवयव में, एक या अधिक पंक्तियों के तदनुरूपी अवयवों के सम अपवर्त्य जोड़े या घटाये जायें, तो सारणिक अपरिवर्तित रहता है।

उपपत्ति : माना, $A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

और सारणिक A की प्रथम पंक्ति के अवयवों में, द्वितीय पंक्ति के तदनुरूपी अवयवों का p गुना, जोड़ने से तथा तृतीय पंक्ति के तदनुरूपी अवयवों का q गुना घटाने से प्राप्त सारणिक A* है तब,

$$A^* = \begin{vmatrix} a_1+pa_2-qa_3 & b_1+pb_2-qb_3 & c_1+pc_2-qc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} pa_2-qa_3 & pb_2-qb_3 & pc_2-qc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(प्रमेय 6.2.5 से)

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} pa_2 & pb_2 & pc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -qa_3 & -qb_3 & -qc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(प्रमेय 6.2.5 से)

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + p\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - q\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = A,$$ (प्रमेय 6.2.4 से)

क्योंकि अन्तिम दो सारणिकों का मान, प्रमेय 6.2.3 से, शून्य है।

उदाहरण 1 : मान बताओ,

$$\begin{vmatrix} 42 & 1 & 6 \\ 28 & 7 & 4 \\ 14 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

हल : उपरोक्त सारणिक, निम्नांकित प्रकार से लिखा जा सकता है :

$$\begin{vmatrix} 7\times6 & 1 & 6 \\ 7\times4 & 7 & 4 \\ 7\times2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 6 & 1 & 6 \\ 4 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$ (प्रमेय 6.2.4 से)

$$= 7.0 = 0$$

प्रमेय 6.2.3 से (प्रथम तथा तृतीय स्तम्भ समरूपी हैं)

उदाहरण 2 : मान बताओ

$$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-a \end{vmatrix}$$

हल : प्रथम स्तम्भ में, द्वितीय तथा तृतीय स्तम्भों को जोड़ने पर, हम देखते हैं कि, दिया हुआ सारणिक

$$= \begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & c-a & a-b \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$$ (प्रमेय 6.2.3 से)

उदाहरण 3 : यदि x, y, z एक दूसरे से भिन्न हों, और

$$A=\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix}=0 \text{ तो दिखायें कि,}$$

$$1+xyz=0$$

हल : हम देखते हैं कि,

$$A=\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{vmatrix} \quad \text{(प्रमेय 6.2.5 से)}$$

$$=\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix}+xyz\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \quad \text{(प्रमेय 6.2.4 के तीन बार प्रयोग करने पर)}$$

$$=(-1)^2\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}+xyz\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \quad \text{(प्रमेय 6.2.2 के दो बार प्रयोग करने से)}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}(1+xyz) \quad \text{(क्यों ?)}$$

परन्तु,
$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} y & y^2 \\ z & z^2 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} x & x^2 \\ z & z^2 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} x & x^2 \\ y & y^2 \end{vmatrix}$$

$$=yz\ (z-y)-zx(z-x)+xy(y-x)$$

$$=(x-y)\ (y-z)\ (z-x)$$

अत: $A=(1+xyz)\ (x-y)\ (y-z)\ (z-x)=0$

परन्तु, $x\neq y\neq z$, जिससे $(x-y)\ (y-z)\ (z-x)\neq 0$

इसलिये, $1+xyz=0$.

प्रश्नावली 6.1

1. निम्नांकित सारणिकों का मान बताओ :

(*i*) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$, (*ii*) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 8 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$,

(*iii*) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$, (*iv*) $\begin{vmatrix} \pi & \frac{1}{2} \\ -1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$,

(*v*) $\begin{vmatrix} (x^2-x+1) & x \\ (x+1) & (x-1) \end{vmatrix}$

2. निम्नांकित सारणिकों की द्वितीय पंक्ति के प्रत्येक अवयव के उपसारणिक तथा सहखंड ज्ञात करो। इन सहखण्डों के प्रयोग से अथवा सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर इनका मान बताओ ?

$(i)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad (ii)\ \begin{vmatrix} 18 & 40 & 58 \\ 16 & 36 & 52 \\ 12 & 28 & 40 \end{vmatrix},$

$(iii)\ \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}, \qquad (iv)\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix},$

$(v)\ \begin{vmatrix} x+\lambda & x & x \\ x & x+\lambda & x \\ x & x & x+\lambda \end{vmatrix}, \qquad (vi)\ \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

3. सारणिकों के प्रयोग से, निम्नांकित समीकरण निकाय को हल करो :

(*i*) $3x-4y=1$
$2x-7y=3$

(*ii*) $2y-3z=0$
$x+3y=-4$
$3x+4y=3$

(*iii*) $6x+y-3z=5$
$x+3y-2z=5$
$2x+y+4z=8$

(*iv*) $3x-4y-z=2$
$6x+6y+3z=7$
$9x-8y-5z=0$

(*v*) $x+y-z=-2$
$3x+2y+3z=13$
$2x+7y+4z=31$

(*vi*) $x+y-6z=0$
$-3x+y+2z=0$
$x-y+2z=0$

4. दिखाओ कि समीकरणों

$$2x-y=0$$
$$x+y-z=0$$

के निकाय का एक अतुच्छ हल है। सिद्ध करो कि तीन अज्ञात राशि वाले दो समीकरणों के निकाय का एक अतुच्छ हल होता है। क्या आप इस परिणाम की और अधिक व्यापक रूप में व्याख्या कर सकते हैं।

5. तीन संख्याओं का योग 20 है। यदि, हम पहली संख्या को 2 से गुणा करके दूसरी संख्या में जोड़ें और फ़िर इसमें से तीसरी संख्या को घटायें तो 23 बचता है। दूसरी तथा तीसरी संख्याओं में पहली संख्या का तीन गुना जोड़ने पर 46 प्राप्त होता है। संख्यायें ज्ञात करो।

6. 5 किलोग्राम गेहूँ, 2 किलोग्राम चावल तथा 5 किलोग्राम चीनी का मूल्य 23 रुपये हैं। 4 किलोग्राम गेहूँ, 4 किलोग्राम चावल तथा 2 किलोग्राम चीनी का मूल्य 19 रुपये है। 3 किलोग्राम गेहूँ, 2 किलोग्राम चावल तथा 4 किलोग्राम चीनी का मूल्य 13 रुपये हैं। प्रत्येक वस्तु का प्रतिकिलो मूल्य ज्ञात करो।

7. किसी त्रिभुज का परिमाप 45 से० मी० है। उसकी सबसे बड़ी भुजा, सबसे छोटी भुजा से 8 से० मी० बड़ी है तथा उनका योग, तीसरी भुजा से दुगुने के बराबर है। त्रिभुज की तीनों भुजाओं को ज्ञात करो।

8. समीकरण $f(x)=ax^2+bx+c$ से परिभाषित, एक द्विघाती फलन ज्ञात करो यदि, $f(0)=6, f(2)=11$ तथा $f(-3)=6$ है ।

6.3 आव्यूह (Matrices)

अब तक, हमने 2×2 कोटि के आव्यूह तथा उनके बीजीय गुणों का अध्ययन किया है । इस अध्याय में, हम 3×3 कोटि के आव्यूहों का अध्ययन करेंगे तथा उनके कुछ अनुप्रयोगों पर विचार करेंगे । इसके लिए, हम आव्यूहों के आगामी अध्ययन में काम आने वाली, आव्यूहों की कुछ परिभाषाओं तथा उनके गुणों को स्मरण करायेंगे ।

परिभाषा 6.3.1 : (वास्तविक या समिश्र) संख्याओं या फलनों की आयताकार सारणी को **आव्यूह (Matrix)** कहते हैं, जैसे

$$(a)\ \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3 & 7 \\ 1 & -1 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad (b)\ \begin{pmatrix} 2i & 4-3i & 1 \\ 1+i & 3i & -2i \\ 1-i & 3i-5 & 2i+1 \end{pmatrix}$$

$$(c)\ \begin{pmatrix} x^2+2 & \sin x \\ \log x & \dfrac{1}{x} \\ x & -x \end{pmatrix}$$

आव्यूह (a) एक वास्तविक संख्याओं की आयताकार सारणी, (b) समिश्र संख्याओं की आयताकार सारणी तथा (c) फलनों की आयताकार सारणी है ।

ध्यान दें कि एक आव्यूह में, केवल संख्याओं या फलनों का आयताकार रूप में प्रविष्टि होती है । यह सारणिकों की तरह केवल एक संख्या नहीं होती है ।

आव्यूह,

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m\times n$ कोटि का आव्यूह कहलाता है तथा इसे A_{mn} लिखते हैं । $m\times n$ का पहला अक्षर, आव्यूह A की पंक्तियों की संख्या तथा दूसरा अक्षर, उसके स्तम्भों की संख्या निरूपित करता है ।

यदि $m=n$ तो आव्यूह A, कोटि n का **वर्ग आव्यूह (Square matrix)** कहलाता है । जब कोई द्विविधा की संभावना न हो तो इसको साधारणतया **कोटि** n का आव्यूह कहते हैं ।

संख्यायें या फलन a_{ij}, आव्युह A के **अवयव (elements)** या प्रविष्टि कहलाते हैं । प्रत्येक अवयव के द्विपादांक, व्यूह में अवयवों की स्थिति अनिर्धारित करते हैं । पहले पादांक से पंक्ति तथा दूसरे पादांक से स्तम्भ का निर्धारण होता है । उदाहरणस्वरूप, a_{13} पहली पंक्ति तथा तीसरे स्तम्भ का अवयव है । $m\times 1$ कोटि के आव्यूह को **स्तम्भ आव्यूह (column matrix)** या **स्तम्भ सदिश (column vector)** कहते हैं । जबकि $1\times n$ कोटि का आव्यूह, **पंक्ति आव्यूह (row matrix)** या **पंक्ति सदिश (row vector)** कहलाता है ।

आव्यूह को प्रदर्शित करने के लिए बहुत से संकेत हैं परन्तु $\|A\|$, (A), [A] संकेत साधारणतया प्रयोग में लाये जाते हैं । हम, यहाँ पर आव्यूह A को प्रदर्शित करने के लिये (A) संकेत का प्रयोग करेंगे । कभी-कभी आव्यूह A को (a_{ij}) से प्रदर्शित किया जाता है, जहाँ a_{ij} आव्यूह के अवयवों को प्रदर्शित करता है ।

6.4. आव्यूह के प्रकार (Types of Matrices)

परिभाषा 6.4.1 : यदि, किसी आव्यूह के सभी अवयव शून्य हों तो उसको **शून्य आव्यूह** (**Zero Matrix**) कहते हैं। इसको **0** से प्रदर्शित किया जाता है। इस प्रकार,

$$(0), \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (0 \quad 0)\cdot$$

विभिन्न कोटि के शून्य आव्यूह हैं।

परिभाषा 6.4.2 : यदि, किसी वर्ग आव्यूह के मुख्य विकर्ण के सभी अवयव 1 हों तथा अन्यत्र सभी अवयव शून्य हों तो, उसको **एकांक आव्यूह** (**Unit Matrix**) या **तत्समक आव्यूह** (**Identity Matrix**) कहते हैं। इसको I से प्रदर्शित किया जाता है। इस प्रकार,

$$(1), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

सभी तत्समक आव्यूह हैं। उनकी कोटि क्रमशः 1, 2 तथा 3 है।

6.5. सारणिकों पर संक्रियाएँ (Operations on Matrices)

पिछली कक्षाओं में कोटि-2 के सारणिकों के योग तथा गुणन की संक्रियाएँ परिभाषित की गई हैं। इस अध्याय में हम उन परिभाषाओं का पुनर्वलोकन करेंगे जो किसी भी कोटि के आव्यूहों के लिए सत्य हैं। परन्तु हम उन आव्यूहों का ही अध्ययन करेंगे जिनमें स्तम्भों तथा पंक्तियों की संख्या तीन से अधिक न हो।

परिभाषा 6.5.1 : दो आव्यूह A तथा B **बराबर** होंगे यदि और केवल यदि उनमें पंक्तियों तथा स्तम्भों की संख्या बराबर हो और एक की प्रत्येक प्रविष्टि दूसरे के तदनुरूपी प्रविष्टि के बराबर हो। अर्थात् यदि और केवल यदि i तथा j के प्रत्येक मान के लिये $a_{ij}=b_{ij}$।

उदाहरण 1 : आव्यूह $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ तथा $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ बराबर हैं यदि और केवल यदि $x=1$ तथा $y=5$।

परिभाषा 6.5.2 : (आव्यूहों का योग) : यदि, A तथा B एक ही कोटि के दो आव्यूह हों तो A तथा B का योग A+B से प्रदर्शित होता है और A तथा B की $i\,j$ वें प्रविष्टियों को जोड़ने से प्राप्त होता है। अर्थात् यदि $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ तथा $C=(c_{ij})$ तो

$$A+B=C, \text{ जहाँ पर } C_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, \; i \text{ तथा } j \text{ के समीकरणों के लिए}$$

इस प्रकार यदि,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ तथा } B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

तब,

$$A+B=\begin{pmatrix} 2+(-2) & (-1)+3 & 2+(-1) \\ 0+1 & 3+4 & 2+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

भिन्न कोटि के आव्यूहों के लिए आव्यूह-योग परिभाषित नहीं है। उदाहरणस्वरूप, आव्यूह (0) तथा $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ को नहीं जोड़ा जा सकता।

प्रमेय *6.5.1* : क्रम विनिमेय तथा साहचर्य दोनों नियम आव्यूह योग के लिए सत्य हैं। अर्थात्, यदि A, B तथा C एक ही कोटि के तीन आव्यूह हों तो,

(i) $A+B=B+A$ **(क्रम विनिमेय गुण)**

तथा

(ii) $A+(B+C)=(A+B)+C$ **(साहचर्य गुण)**

$=A+B+C$

उपपत्ति : (i) माना, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$

तब, परिभाषा 6.5.2 से,

$A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$

तथा $B+A=(b_{ij})+(a_{ij})=(b_{ij}+a_{ij})$

परन्तु, $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$ (संख्याओं के योग के क्रम विनिमेय नियम से)

अतः, $A+B=B+A$

(ii) $A+(B+C)=(a_{ij})+(b_{ij}+c_{ij})$

तथा $(A+B)+C=(a_{ij}+b_{ij})+(c_{ij})$

संख्याओं के योग के सहचर्य के नियम से $(aij+bij)+cij=aij+(bij+cij)$ अतः $(A+B)+C=A+(B+C)$

उदाहरण 2 : महेश के पास क्रमशः A, B तथा C स्थानों पर तीन कपड़ा मिले हैं। प्रत्येक मिल 1, 2 तथा 3 अंकित तीन मूल्यों में लड़के तथा लड़कियों के लिए वस्त्रों का उत्पादन करती है। प्रत्येक मिल में उत्पादित मात्राओं को आव्यूहों के रूप में दिया गया है।

	'A' पर मिल			'B' पर मिल			'C' पर मिल		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
लड़के	75	70	72	80	84	72	25	35	40
लड़कियां	60	65	40	65	69	54	30	22	36

लड़कों तथा लड़कियों के लिये प्रत्येक प्रकार के वस्त्रों का सम्पूर्ण उत्पादन ज्ञात करो।

हल : इस प्रश्न का उत्तर, तीनों आव्यूहों का योग करने पर प्राप्त होगा। अर्थात्

$$\begin{pmatrix}75 & 70 & 72\\ 60 & 65 & 40\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}80 & 84 & 72\\ 65 & 69 & 54\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}25 & 35 & 40\\ 30 & 22 & 36\end{pmatrix}$$

सर्वप्रथम, पहले दो आव्यूहों का योग करने पर, हम देखते हैं कि,

$$\begin{pmatrix}75+80 & 70+84 & 72+72\\ 60+65 & 65+69 & 40+54\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}25 & 35 & 40\\ 30 & 22 & 36\end{pmatrix}$$

अब, उपरोक्त दोनों आव्यूहों का योग करने पर,

$$\begin{pmatrix}75+80+25 & 70+84+35 & 72+72+40\\ 60+65+30 & 65+69+22 & 40+54+36\end{pmatrix}$$

या, $$\begin{pmatrix}180 & 189 & 184\\ 155 & 156 & 130\end{pmatrix}=P \text{ (मान लिया)}$$

इसलिए, लड़के तथा लड़कियों के लिए प्रत्येक प्रकार के वस्त्रों का सम्पूर्ण उत्पादन P है।

परिभाषा 6.5.3 : यदि, k एक दी हुई संख्या है और $A=(a_{ij})_{m\times n}$ आव्यूह हो तो,

$$kA=(ka_{ij})_{m\times n}$$

अर्थात्, यदि किसी आव्यूह को किसी संख्या से गुणा किया जाता है तो उसकी सभी प्रविष्टियां उसी संख्या से गुणित होती हैं। उदाहरणस्वरूप,

$$3\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 2\\ 0 & 5 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -3 & 9\\ 12 & 3 & 6\\ 0 & 15 & -21\end{pmatrix}$$

इसके परिणामस्वरूप, हम निम्नांकित बण्टन नियम प्राप्त करते हैं, जिसका सत्यापन पाठकगण स्वयं कर सकते हैं।

प्रमेय *6.5.2* : यदि A तथा B समान कोटि के दो आव्यूह तथा k, m दी हुयी संख्यायें हों तो,

$$(k+m)\ A=kA+mA$$

तथा,

$$k\ (A+B)=kA+kB$$

दो आव्यूहों का अन्तर, योग के रूप में, उपर्युक्त तरीके से ही परिभाषित होता है।

उदाहरण 3 : एक खुदरे ऊन विक्रय केन्द्र में तीन प्रकार के ऊन हैं : साधारण, उत्तम और सर्वोत्तम। ये ऊन पीले, हरे तथा लाल तीन रंगों में हैं। उस बिक्री केन्द्र की साप्ताहिक बिक्री आव्यूहों के रूप में निम्न तरह दी गयी है,

$$\begin{array}{ccccc} & \text{पीला} & \text{हरा} & \text{लाल} & \\ P= & \left(\begin{matrix}P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31}\end{matrix}\right. & \begin{matrix}P_{12} \\ P_{22} \\ P_{32}\end{matrix} & \left.\begin{matrix}P_{13} \\ P_{23} \\ P_{33}\end{matrix}\right) & \begin{matrix}\text{साधारण} \\ \text{उत्तम} \\ \text{सर्वोत्तम}\end{matrix}\end{array}$$

जहाँ पर, उदाहरणस्वरूप, P_{31}, एक सप्ताह में बेचे गये सर्वोत्तम पीले ऊन के किलोग्रामों की संख्या प्रदर्शित करती है।

माना, सप्ताह के प्रारम्भ में विक्रय केन्द्र-तालिका निम्न प्रकार से दी गयी है,

$$\begin{array}{ccccc} & \text{पीला} & \text{हरा} & \text{लाल} & \\ Q= & \left(\begin{matrix}a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31}\end{matrix}\right. & \begin{matrix}a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32}\end{matrix} & \left.\begin{matrix}a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33}\end{matrix}\right) & \begin{matrix}\text{साधारण} \\ \text{उत्तम} \\ \text{सर्वोत्तम}\end{matrix}\end{array}$$

सप्ताह के अन्त में तालिका ज्ञात करो।

हल : स्पष्टतया, हमें आव्यूहों Q तथा P का अन्तर ज्ञात करना है। परन्तु,

$$Q-P=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}P_{11} & P_{12} & P_{13}\\ P_{21} & P_{22} & P_{23}\\ P_{31} & P_{22} & P_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}-P_{11} & a_{12}-P_{12} & a_{13}-P_{13}\\ a_{21}-P_{21} & a_{22}-P_{22} & a_{23}-P_{23}\\ a_{31}-P_{31} & a_{32}-P_{32} & a_{33}-P_{33}\end{pmatrix}$$

है जो सप्ताह के अन्त की तालिका निरूपित करती है।

माना

$$A=\begin{pmatrix}1 & -7 & 6\\ 3 & 2 & -5\end{pmatrix}$$

तब,

$$-A=\begin{pmatrix}-1 & 7 & -6\\ -3 & -2 & 5\end{pmatrix}\ (\text{क्यों ?})$$

और,

$$A+(-A)=\begin{pmatrix}1 & -7 & 6\\ 3 & 2 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 7 & -6\\ -3 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1-1 & -7+7 & 6-6\\ 3-3 & 2-2 & -5+5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

इसके अलावा,

$$(-A)+A=\begin{pmatrix}-1 & 7 & -6\\ -3 & -2 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -7 & 6\\ 3 & 2 & -5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1+1 & 7-7 & -6+6\\ -3+3 & -2+2 & 5-5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

इसलिये,

$$A+(-A)=0=(-A)+A$$

साधारणतया: किसी भी आव्यूह A के लिये,

$$A+(-A)=0=(-A)+A$$

तथा $A+0=A=0+A$ सत्य हैं।

आव्यूह $(-A)$ को आव्यूह A का **योज्य व्युत्क्रम (additive inverse)** तथा 0 को **योज्य-तत्समक (additive identity)** कहते हैं। इस प्रकार, A, $(-A)$ का योज्य व्युत्क्रम है (क्यों ?)

परिभाषा 6.5.4 : (आव्यूहों का गुणन) यदि,

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \text{ तथा } B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{pmatrix}$$

तो **A और B के गुणनफल** को AB से प्रदर्शित करते हैं, जहाँ

$$AB=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}\end{pmatrix}$$

$$=C \text{ (माना)}$$

गुणनफल आव्यूह की प्रविष्टियों को निम्नांकित प्रकार से ज्ञात किया जाता है :

1. गुणनफल आव्यूह $AB=C$ की प्रविष्टि c_{11}, जो स्थिति 11 अर्थात् पंक्ति 1 तथा स्तम्भ 1 में है, को प्राप्त करने के लिए A के प्रथम पंक्ति के अवयवों को B के प्रथम स्तम्भ के तदनुरूपी अवयवों से गुणा किया जाता है। इन गुणनफलों का योग ही प्रविष्टि c_{11} है।

2. प्रविष्टि c_{23}, जो स्थिति 23, अर्थात् पंक्ति 2 तथा स्तम्भ 3 में है, को प्राप्त करने के लिए A की द्वितीय पंक्ति के अवयवों को B क तृतीय स्तम्भ के तदनुरूपी अवयवों से गुणा किया जाता है, इन गुणनफलों का योग AB की प्रविष्टि c_{23} है। व्यापक रूप में, C में ij स्थिति की प्रविष्टि, आव्यूह A की पंक्ति i के अवयवों तथा आव्यूह B के स्तम्भ j के तदनुरूपी अवयवों के गुणनफल का योग है।

चूँकि गुणनफल आव्यूह की प्रविष्टियों को प्राप्त करने के लिए पंक्ति की प्रविष्टियों को तदनुरूपी स्तम्भ की प्रविष्टियों से गुणा किया जाता है, इसलिये, **यहाँ पर ध्यान रखना आवश्यक है कि, A के स्तम्भों की संख्या B की पंक्तियों के बराबर हो। इस स्थिति में ही A तथा B का गुणनफल परिभाषित है।** विशिष्ट स्थिति में, यदि A तथा B समान कोटि के वर्ग आव्यूह हों तो उनके गुफनणल AB तथा BA सदैव परिभाषित हैं।

ध्यान रखें कि, यदि A तथा B क्रमशः $m \times n$ और $n \times p$ कोटि के आव्यूह हों तो गुणनफल आव्यूह AB की कोटि $m \times p$ होती है। अपरंच, इस स्थिति में BA परिभाषित नहीं भी हो सकती है। (क्यों ?)

उदाहरण 4 : मान बताओ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

हल : स्पष्टतया, यह गुणनफल परिभाषित है क्योंकि, पहली आव्यूह 2×3 कोटि की तथा दूसरी 3×1 कोटि की है।

अब, $$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\times 6(-2)+2\times 1 \\ 0\times 2+1(-2)+5\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ध्यान दे कि $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ परिभाषित नहीं है क्योंकि पहला आव्यूह 3×1 कोटि का तथा दूसरा 2×3 कोटि का है।

उदाहरण 5 : एक विक्रय-केन्द्र में 20 दर्जन कमीज, 16 दर्जन पेंट तथा 32 दर्जन मोजे हैं। माना, प्रति कमीज बिक्री मूल्य 35 रुपये, प्रति पेंट 75 रुपये तथा प्रति जोड़े मोजे 8 रुपये है। सभी वस्तुओं की बिक्री से, विक्रेता को कुल कितनी धन राशि प्राप्त होगी ?

हल : विक्रय केन्द्र की वस्तुओं को आव्यूह के रूप में निम्नांकित दो तरीकों में से किसी से व्यक्त किया जा सकता है :

$$A_{1\times 3} = (240 \quad 192 \quad 384) \quad \text{या} \quad B_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 240 \\ 192 \\ 384 \end{pmatrix}$$

इसी तरह, उनके मूल्यों को भी निम्नांकित दो तरीकों में से किसी से व्यक्त किया जा सकता है :

$$C_{1\times 3} = (35 \quad 75 \quad 8) \quad \text{या} \quad D_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 35 \\ 75 \\ 8 \end{pmatrix}$$

चूँकि, प्राप्त सम्पूर्ण धन राशि एक संख्या, अर्थात् 1×1 कोटि का एक आव्यूह है, इसलिये यह आवश्यक है कि इन आव्यूहों का गुणनफल 1×1 कोटि का एक आव्यूह हो। उपरोक्त तथ्यों के आधार पर हम देखते हैं कि केवल निम्नांकित चार गुणनफल परिभाषित हैं :

(*i*) $A_{1\times 3}\, D_{3\times 1}$ (*ii*) $B_{3\times 1}\, C_{1\times 3}$ (*iii*) $C_{1\times 3}\, B_{3\times 1}$ (*iv*) $D_{3\times 1}\, A_{1\times 3}$

इन गुणनफलों में, AD या CB से हमें इच्छित उत्तर प्राप्त होगा (क्यों ?) आइये, इन गुणनफलों पर विचार करें :

$$\begin{aligned} AD &= (240 \quad 192 \quad 384) \begin{pmatrix} 35 \\ 75 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= (240 \times 35 + 192 \times 75 + 384 \times 8) \\ &= (8400 + 14400 + 3072) \\ &= (25872) \end{aligned}$$

$$CB = (35 \quad 75 \quad 8) \begin{pmatrix} 240 \\ 192 \\ 384 \end{pmatrix}$$
$$= (35 \times 240 + 75 \times 192 + 8 \times 384)$$
$$= (25872)$$

इस प्रकार, विक्रेता को प्राप्त होने वाली संपूर्ण धनराशि 25872 रुपये है।

उदाहरण 6 : एक ठेकेदार, एक नगर विकास योजना के अन्तर्गत कुछ मकानों को निर्मित करने का ठेका लिया है। इन मकानों के निर्माण में उसे पत्थर, बालू इत्यादि वस्तुओं की आवश्यकता है। नगर में F_1, F_2 तथा F_3 तीन व्यवसाय संस्थायें हैं, जो इन वस्तुओं की आपूर्ति उसे समय-समय पर करती हैं। एक समय, F_1, F_2 तथा F_3 संस्थाओं ने क्रमशः 35, 30 तथा 29 ट्रक पत्थर और 14, 8 तथा 9 ट्रक बालू की आपूर्ति की। यदि आपूर्ति की हुयी एक ट्रक पत्थर का मूल्य 1000/- रुपये तथा प्रति ट्रक बालू का मूल्य 300/- रुपये हो तो प्रत्येक व्यवसाय संस्था ठेकेदार से कितनी धनराशि प्राप्त करती है।

हल : आपूर्तियों को आव्यूह के रूप में लिखने पर, हमें निम्नांकित आव्यूह प्राप्त होता है :

$$\begin{matrix} & F_1 & F_2 & F_3 \\ \text{पत्थर} & 35 & 30 & 29 \\ \text{बालू} & 14 & 8 & 9 \end{matrix}$$

इसको हम **आपूर्ति-आव्यूह (supply matrix)** कहेंगे। **मूल्य-आव्यूह (cost matrix)** इस प्रकार लिखा जा सकता है :

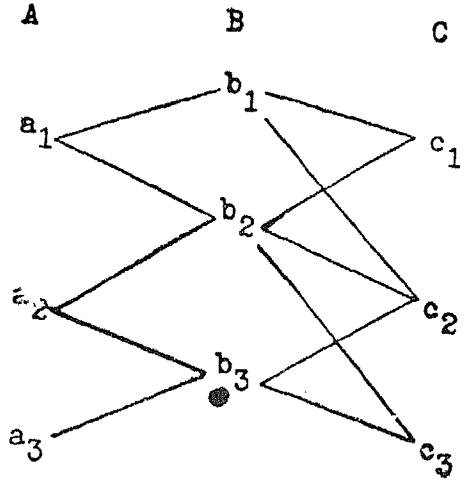
$$\begin{matrix} & \text{पत्थर} & \text{बालू} \\ \text{धनराशि} & (1000 & 300) \end{matrix}$$

प्रत्येक व्यवसाय-संस्था को दी जाने वाली कुल धनराशि इन दो आव्यूहों के गुणनफल से व्यक्त की जाती है (क्यों ?)

$$(1000 \quad 300) \begin{pmatrix} 35 & 30 & 29 \\ 14 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
$$= (39200 \quad 32400 \quad 31700)$$

इस प्रकार, F_1, को 39200 रुपये, F_2 को 32400 रुपये तथा F_3 को 31700 रुपये प्राप्त होते हैं।

उदाहरण 7 : निम्नांकित सड़कों के जाल-तंत्र पर विचार करें, जो A प्रांत के तीन, B प्रांत के तीन तथा C प्रांत के तीन कस्बों को संबद्ध करता है,



प्रांत A तथा B के कस्बों को संबद्ध करने वाली सड़कों की संख्या को हम निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

	b_1	b_2	b_3
a_1	1	1	0
a_2	0	1	1
a_3	0	0	1

यहाँ, a_1, के पहले तथा b_1 के नीचे वाली प्रविष्टि 1 यह सूचित करती है कि a_1 तथा b_1 के बीच केवल एक ही सड़क सन्धि है। a_3 के पहले तथा b_2 के पहले वाली प्रविष्टि 0 यह सूचित करती है कि a_3 तथा b_2 के बीच कोई सीधी सड़क नहीं है और इसी प्रकार अन्य दूसरों के लिए भी। उपरोक्त सारिणी को आव्यूह के रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P \quad (\text{माना})$$

इसी प्रकार, प्रांत B और C के कस्बों को संबद्ध करने वाली सड़कों की संख्या को निम्न आव्यूह के रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = Q \quad (\text{माना})$$

गुणनफल PQ ज्ञात करने पर,

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

आव्यूह PQ, प्रांत A के कस्बों को प्रांत C के कस्बों से सम्बद्ध करने वाली सड़कों के जाल तंत्र को व्यक्त करता है। (क्यों ?)।

इसका सत्यापन वास्तव में प्रांत A तथा C के कस्बों को संबद्ध करने वाली सड़कों की सारिणी बनाकर किया जा सकता है।

उदाहरण 8 : माना,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ तथा } B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

AB तथा BA ज्ञात करो। क्या AB=BA है ?

हल : हम देखते हैं कि, AB=

$$\begin{pmatrix} 2\times(-3)+(-1)\times0+3\times1 & 2\times2+(-1)\times5+3\times(-2) & 2\times(-1)+(-1)\times2+3\times1 \\ (-3)\times(-3)+2\times0+0\times1 & (-3)\times2+2\times5+0\times(-2) & (-3)\times(-1)+2\times2+0+1 \\ 5\times(-3)+1+0+(-1)\times1 & 5\times2+1\times5+(-1)\times(-2) & 5\times(-1)+1\times2+(-1)\times1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -7 & -1 \\ 9 & 4 & 7 \\ -16 & 17 & -4 \end{pmatrix}$$

तथा

$$BA=\begin{pmatrix}(-3)\times2+2\times(-3)+(-1)\times5 & (-3)\times(-1)+2\times2+(-1)\times1 & (-3)\times3+2\times0+(-1)\times(-1)\\ 0\times2+5\times(-3)+2\times5 & 0\times(-1)+5\times2+2\times1 & 0\times3+5\times0+2\times(-1)\\ 1\times2+(-2)\times(-3)+1\times5 & 1\times(-1)+(-2)\times2+1\times1 & 1\times3+(-2)\times0+1\times(-1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-17 & 6 & -8\\ -5 & 12 & -2\\ 15 & -4 & 2\end{pmatrix}$$

इस प्रकार $AB\neq BA$

अतः निष्कर्ष यह है कि, **आव्यूहों का गुणन क्रम विनिमेय नियम का पालन नहीं करता है**

उदाहरण 9 : यदि,

$$A=\begin{pmatrix}3 & 12\\ 2 & 13\end{pmatrix} \quad \text{तथा} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} \text{ हो,}$$

तो AB तथा BA ज्ञात करो। क्या $AB=BA$ है ?

हल : ध्यान दें कि AB परिभाषित नहीं है। (क्यों ?)

हम देखते हैं कि,

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 12\\ 2 & 13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 38\\ 11 & 49\\ 12 & 63\end{pmatrix}$$

इसलिये, $AB\neq BA$

संख्याओं के लिये हम यह जानते हैं कि $ab=0$ तब तथा तभी सम्भव है जबकि या तो $a=0$ या $b=0$ अथवा दोनों शून्य हों। यह गुणधर्म आव्यूह-गुणन के लिए सत्य नहीं है।

दूसरे शब्दों में, **यदि दो आव्यूह A तथा B इस प्रकार हों कि $AB=0$, तो यह हमेशा सत्य नहीं है $A=0$ या $B=0$ या दोनों**

उदाहरण 10 : माना,

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix} \quad \text{तथा} \quad B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

तब, $$AB=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

परन्तु, $A\neq0$, $B\neq0$.

वास्तविक सख्याओं के बीजगणित से, हम देखते हैं कि यदि $b=c$ तो वास्तविक संख्या a के लिए $ab=ac$ तथा यदि $ba=ca$ तो $b=c$ होता है। इसका पहला भाग आव्यूहों के लिए भी सत्य है अर्थात् यदि A, B तथा C तीन आव्यूह हों तो $B=C$ से किसी आव्यूह A के लिए $AB=AC$ प्राप्त होता है। परन्तु गुणनफलों का परिभाषित होना आवश्यक है। इसका विलोम सत्य नहीं है अर्थात् यदि **$AB=AC$ हो तो यह आवश्यक नहीं है कि $B=C$ होगा।**

उदाहरण 11 : माना,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 6 & 6 & 6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-4 & 6\\ 2 & -10\\ 8 & 2\end{pmatrix}$$

और $$C=\begin{pmatrix}8 & 2\\ -8 & -6\\ 6 & 2\end{pmatrix}$$

तब $$AB=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 6 & 6 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 6\\ 2 & -10\\ 8 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -4\\ 36 & -12\end{pmatrix}$$

और $$AC=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 6 & 6 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 2\\ -8 & -6\\ 6 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -4\\ 36 & -12\end{pmatrix}$$

इस प्रकार, $AB=AC$ परन्तु $B\neq C$

वास्तविक संख्याओं के प्रारम्भिक बीजगणित से हमें निम्नांकित बंटन-नियम ज्ञात है :

$$a(b+c)=ab+ac$$

तथा $$(a+b)c=ac+bc$$

इनके अनुरूप आव्यूहों के लिए भी वंटन-नियम हैं।

उदाहरण 12 : माना

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix},\quad \text{तथा } C=\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix}$$

तब, $$(B+C)=\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1+c_1 & b_2+c_2\\ b_3+c_3 & b+c_4\end{pmatrix}$$

$$A(B+C)=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1+c_1 & b_2+c_2\\ b_3+c_3 & b_4+c_4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_1(b_1+c_1)+a_2(b_3+c_3) & a_1(b_2+c_2)+a_2(b_4+c_4)\\ a_3(b_1+c_1)+a_4(b_3+c_3) & a_3(b_2+c_2)+a_4(b_4+c_4)\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1+a_2b_3 & a_1b_2+a_2b_4\\ a_3b_1+a_4b_1 & a_3b_2+a_2b_4\end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1c_1+a_2c_3 & a_1c_2+a_2c_4\\ a_3c_1+a_4c_3 & a_3c_2+a_4c_4\end{pmatrix}$$

$$AB+AC=\begin{pmatrix}a_1b_1+a_2b_3+a_1c_1+a_2c_3 & a_1b_2+a_2b_4+a_1c_2+a_2c_4\\ a_3b_1+a_4b_1+a_3c_1+a_4c_3 & a_3b_2+a_4b_4+a_3c_2+a_4a_4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_1(b_1+c_1)+a_2(b_3+c_3) & a_1(b_2+c_2)+a_2(b_4+c_4)\\ a_3(b_1+c_1)+a_4(b_3+c_3) & a_3(b_2+c_2)+a_4(b_4+c_4)\end{pmatrix}$$

व्यापक रूप में, **यदि A, B तथा C किसी भी कोटि के तीन आव्यूह हों तो $A\,(B+C)=AB+AC$ जबकि दोनों पक्षों में योग तथा गुणनफल परिभाषित हैं।**

अब तक, आव्यूहों पर जो भी संक्रियायें की गई हैं, उनको सारांश रूप में हम निम्न प्रकार व्यक्त करते हैं :

1. आव्यूहों का योग क्रम विनिमेय तथा साहचर्य नियम का पालन करता है।

2. एक आव्यूह को उसके ऋण आव्यूह में जोड़ने से शून्य आव्यूह प्राप्त होता है।
3. किसी भी कोटि का एक शून्य आव्यूह उसी कोटि को दिए हुए आव्यूहों के लिए योज्य तत्समक होता है।
4. व्यापक रूप में आव्यूहों का गुणनफल क्रम विनिमेय नियम का पालन नहीं करता है।
5. आव्यूह-गुणन के लिए निरसन-नियम सत्य नहीं है। (आव्यूह-योग के लिए यह सत्य है अर्थात् यदि $A+B=A+C$ तब $B=C$) अर्थात् $AB=AC$ में $B=C$ निहित नहीं है।
6. आव्यूहों के लिए वंटन-नियम सत्य है। अर्थात्

$$A(B+C)=AB+CA$$
$$(B+C)A=BA+CA$$

6.6 व्युत्क्रम आव्यूह (Inverse of a Matrix)

दिए हुए आव्यूह A तथा B पर विचार करें :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

हम देखते हैं कि,

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

तथा,

$$BA=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

अर्थात्

$$AB=BA=I \qquad (1)$$

जब, आव्यूह A तथा B इस प्रकार होते हैं कि (1) संतुष्ट हो तो B, A का **व्युत्क्रम** तथा A, B का व्युत्क्रम कहलाता है।

परिभाषा 6.6.1 : यदि A तथा B दो वर्ग आव्यूह इस प्रकार हों कि $AB=BA=I$ तो B, **A का व्युत्क्रम** कहलाता है और इसको $A^{-1}(=B)$ से व्यक्त करते हैं। इसी प्रकार, A, **B का** व्युत्क्रम कहलाता है और $B^{-1}(=A)$ से व्यक्त होता है।

ध्यान रखें कि, व्युत्क्रम-आव्यूह का तभी अस्तित्व है जबकि निम्नांकित आवश्यकतायें पूर्ण होती हैं :

(*i*) दिया हुआ आव्यूह अवश्य ही वर्ग आव्यूह होना चाहिए। यह बहुत ही अनिवार्य है क्योंकि समीकरण (1) में, यदि A तथा B क्रमश: 2×3 तथा 3×2 कोटि के हों तो AB तथा BA दोनों परिभाषित हैं परन्तु विभिन्न कोटि 2×2 तथा 3×3 के हैं। अत: बराबर वे नहीं हो सकते।

(*ii*) समीकरण (1) का सन्तुष्ट होना आवश्यक है।

उदाहरणस्वरूप, आव्यूह

$$A=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$

के लिए $$AB = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 20 & 5 \end{pmatrix} = BA$$
परन्तु AB, I के बराबर नहीं है।

उपरोक्त तथ्यों के आधार पर हम कह सकते हैं कि शून्य आव्यूह का कोई व्युत्क्रम नहीं होता (क्यों ?)

प्रत्येक वर्ग आव्यूह

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

से सम्बन्धित एक अंक या फलन

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

है। इसे आव्यूह का सारणिक कहते हैं तथा $|A|$ से निरूपित करते हैं। ध्यान दें कि किसी 1×1 कोटि के वर्ग आव्यूह के लिए $|A|$ का मान संख्या के निरपेक्ष मान (absolute value) के बराबर नहीं होता है। जैसे एक कोटि के वर्ग आव्यूह $A = (-5)$ के लिए $|A| = -5$।

दिए हुए आव्यूह के व्युत्क्रम ज्ञात करने के लिए हमें निम्नांकित परिभाषाओं एवं परिणामों की आवश्यकता है।

परिभाषा 6.6.2 एक वर्ग आव्यूह A, जहाँ पर $|A| \neq 0$ अर्थात जिसका सारणिक शून्य के बराबर नहीं है, **व्युत्क्रमणीय (non singular)** कहलाता है। अन्यथा, यह **अव्युत्क्रमणीय (singular)** कहलाता है।

उदाहरणस्वरूप, आव्यूह $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ व्युत्क्रमणीय है,

क्योंकि $$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$$ तथा आव्यूह

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$ अव्युत्क्रमणीय है क्योंकि

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1(21-20) - 2(14-12) + 3(10-9)$$
$$= 1 - 4 + 3 = 0$$

परिभाषा 6.6.3 : $n \times m$ आव्यूह A की पंक्तियों तथा स्तम्भों के विनिमय से प्राप्त $m \times n$ कोटि के आव्यूह को A का **परिवर्त** (transpose) कहते हैं तथा A′ से प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरणस्वरूप, $A = (1 \quad 2 \quad 3)$ का परिवर्त

$$A' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{तथा} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 0 \\ -5 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

का परिवर्त $B' = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 9 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ है।

निम्न का सत्यापन किया जा सकता है।

(a) $(A')' = A$, (b) $(kA)' = kA'$ जहाँ k एक अचर संख्या है।

(c) $(A+B)' = A' + B'$ तथा (d) $(AB)' = B'A'$

परिभाषा 6.6.4 : माना,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

एक 3×3 कोटि का आव्यूह है और a_{ij} का सहखण्ड (cofactor) A_{ij} है। A का सह-खण्डन (adjecent) आव्यूह, जो सहखण्डज A से प्रदर्शित होता है, निम्न प्रकार से परिभाषित होता है :

$$\text{सहखण्डज } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

ध्यान रखें कि, i वे पंक्ति (स्तम्भ) के अवयवों के सहखण्ड सहखण्डज A के i वें स्तम्भ (पंक्ति) के अवयव होते हैं।

आव्यह $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$ के लिए

$A_{11} = 7$, $A_{12} = 5$, $A_{21} = -6$ तथा $A_{22} = 1$

अतः सहखण्डज $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

तथा आव्यूह $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ के लिए

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

इसलिए,

$$\text{सहखण्डज } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

आइए, (सहखण्डज A). A तथा A. (सहखण्डज A) की गणना करें। हम देखते हैं कि,

$$A.\ \text{सहखण्डज } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = -7\,I$$

तथा,

$$\text{सहखण्डज A . A} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = -7 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad -7$$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि

$$\text{A . सहखण्डज A} = \text{सहखण्डज A . A}$$

अब $|A|$ का मान ज्ञात करें। हम देखते हैं कि,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 6 - 4 - 9 = -7$$

उपरोक्त उदाहरण से यह विदित होता है कि

$$\text{A . सहखण्डज A} = \text{सहखण्डज A . A} = |A| \; I$$

या, $\dfrac{\text{A . सहखण्डज A}}{|A|} = \dfrac{\text{सहखण्डज A . A}}{|A|} = I$, जो हमेशा सत्य है।

इसकी उपपत्ति इस पुस्तक के पाठ्यक्रम के अन्तर्गत नहीं है।

इस प्रकार, $\dfrac{\text{सहखण्डज A}}{|A|}$ या $|A|^{-1}$ (सहखण्डज A), आव्यूह A का व्युत्क्रम है। अतः

$$A^{-1} = \frac{\text{सहखण्डज A}}{|A|}$$

इसलिए, **यदि A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह, अर्थात् $|A| \neq 0$ हो तो**

$$A^{-1} = \frac{\text{सहखण्डज A}}{|A|}$$

संख्यात्मक उदाहरणों में, आव्यूहों के व्युत्क्रम ज्ञात करने के पहले, हम निम्नांकित प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 6.6.1 : **व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह A का व्युत्क्रम अद्वितीय होता है।**

उपपत्ति : माना A के दो व्युत्क्रम B तथा C हैं। तब, व्युत्क्रम की परिभाषा से,

$$BA = AB = I \qquad (i)$$

तथा $$CA = AC = I \qquad (ii)$$

$BA = I$ पर विचार करें। दोनों पक्षों में C के पश्चगुणन से हम देखते हैं कि

$$BAC = IC$$

या $BI = C$ (ii) से

या $B = C$

ध्यान दें कि, चूंकि I . I=I, I स्वयं का व्युत्क्रम है। तथा प्रत्येक आव्यूह A के लिए AI=IA =A का होता है।

उदाहरण 1 : आव्यूह $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात करो।

हल : माना,

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

तब, $\quad |A|=(ad-bc), \quad A_{11}=d, \quad A_{12}=-c$

$A_{21}=-b$ तथा $A_{22}=a$ तथा

सहखण्डज $A=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

इसलिए, यदि $(ad-bc)\neq 0$, तब

$$A^{-1}=\frac{\text{सहखण्डज } A}{|A|}=\frac{1}{(ad-bc)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

यह ज्ञात करने के लिए कि $\frac{1}{(ad-bc)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, A

का व्युत्क्रम है, दोनों आव्यूहों को गुणा करें। हम देखते हैं कि,

$$\frac{1}{(ad-bc)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

तथा,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\frac{1}{(ad-bc)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

अतः $\quad \frac{1}{(ad-bc)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

का व्युत्क्रम है।

उदाहरण 2 : आव्यूह,

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात करो।

हल : हम देखते हैं कि

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=1\neq 0$$

अतः B के व्युत्क्रम का अस्तित्व है। अब,

$$B_{11}=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=7, \quad B_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-1, \quad B_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-1,$$

$$B_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-3, \quad B_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=1, \quad B_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=0$$

$$B_{31}=\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=-3, B_{31}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=0, B_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=1$$

इसलिए,

$$\text{सहखण्डज } B=\begin{matrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

तथा

$$B^{-1}=\frac{\text{सहखण्डख } B}{|B|}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

पाठकगण स्वयं इसकी सत्यता की जाँच कर लें कि वह वास्तव में B का व्युत्क्रम है।

6.7 रैखिक समीकरण-निकाय (System of Linear Equations)

समीकरण निकाय

$$2x+3y=16 \qquad (1)$$
$$5x+\ y=14 \qquad (2)$$

पर विचार करें।

इन समीकरणों का अद्वितीय हल $x=2$ तथा $y=4$ है।

अब, समीकरण निकाय

$$x+4y=5 \qquad (3)$$
$$2x+8y=10 \qquad (4)$$

पर विचार करें।

ये दोनों समीकरण एक समान हैं। (3) का प्रत्येक हल (4) का तथा (4) का प्रत्येक हल (3) का हल है। उदाहरणार्थ, $x=1$, $y=1$; $x=0$, $y=\frac{5}{4}$; $x=9$, $y=-1$ समीकरण निकाय (3)—(4) के कुछ हल हैं। दिए हुए समीकरण निकाय के अनंत हल हैं।

पुनः एक दूसरे समीकरण निकाय

$$3x+2y=5 \qquad (5)$$
$$3x+2y=7 \qquad (6)$$

पर विचार करने पर हम देखते हैं कि, दोनों समीकरणों के लेखाचित्र समान्तर रेखाएँ हैं जो प्रतिच्छेद नहीं करतीं। दूसरे शब्दों में, दोनों रेखाओं में कोई उभयनिष्ट बिन्दु नहीं है। इसलिए, दिया हुआ समीकरण निकाय (5)—(6) का कोई हल नहीं है।

वह रैखिक समीकरण निकाय, जिसका कम से कम एक हल हो, **संगत समीकरण निकाय (consistent equations)** कहलाता है अन्यथा **असंगत (incosistent)** तहलाता है।

सारांशत: इसको हम निम्न प्रकार व्यक्त करते हैं।

परिभाषा 6.7.1 : n अज्ञात राशियों $x_1, x_2 .. x_n$ वाले m रैखिक समीकरण निकाय पर विचार करें।

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+\ldots+a_{1n}\,x_n&=b_1\\ a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2+\ldots+a_{2n}\,x_n&=b_2\\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots\\ a_{m1}\,x_1+a_{m2}\,x_2+\ldots+a_{mn}\,x_n&=b_m \end{aligned}$$

जिसमें a तथा अचरपद b के सभी गुणांक वास्तविक हैं। जब समीकरण निकाय का कम से कम एक हल होता है तो उसे **संगत** अन्यथा **असंगत** कहते हैं।

समीकरण (1)—(2) संगत समीकरण हैं तथा उनका केवल एक ही हल है। समीकरण (3)—(4) संगत समीकरण हैं तथा उनके अनन्त हल हैं। समीकरण (5)—(6) असंगत समीकरण हैं।

आव्यूहों की सहायता से हम रैखिक समीकरणों के निकाय का हल ज्ञात कर सकते हैं। निम्न उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 1 : रैखिक समीकरणों,

$$4x-3y=11$$
$$3x+7y=-1$$

को आव्यूह की सहायता से हल करो।

हल : इस समीकरण निकाय को आव्यूह समीकरण से निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है,

$$\begin{pmatrix} 4x-3y \\ 3x+7y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

अर्थात् $$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

या, $AX=B$, जहाँ पर,

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ तथा } B=\begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

यदि, A^{-1}, A का व्युत्क्रम हो तो $A^{-1}A=I=AA^{-1}$ तथा $AX=B$ को हम इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$A^{-1}AX=A^{-1}B$$

या $$X=A^{-1}B \qquad (2)$$

अब, यदि हसे A^{-1} ज्ञात हो तो X, समीकरण (2) से ज्ञात कर सकते हैं।

हमें यह भी ज्ञात है कि A का तभी व्युत्क्रम होगा जब $|A|\neq 0$ यहाँ

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=28-(-9)=37\neq 0$$

इसलिए, A का व्युत्क्रम है तथा

$$A^{-1}=\frac{1}{37}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{7}{37} & \frac{3}{37} \\ \frac{-3}{37} & \frac{4}{37} \end{pmatrix}$$

(1) के दोनों पक्षों में A^{-1} के पूर्व गुणन से, हम देखते हैं कि,

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{37} & \frac{3}{37} \\ \frac{-3}{37} & \frac{4}{37} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{7}{37} & \frac{3}{37} \\ \frac{-3}{37} & \frac{4}{37} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

या,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{74}{37} \\ \frac{-37}{37} \end{pmatrix}$$

अर्थात् $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

इसलिए, समीकरण निकाय का हल $x=2$ तथा $y=-1$ है।

उदाहरण 1 से हमें यह संकेत होता है कि रैखिक समीकरण निकाय तभी संगत होगा या उसका हल तभी प्राप्त होगा जब गुणांक आव्यूह का सारणिक शून्य नहीं है अर्थात् गुणांक आव्यूह व्युत्क्रमणीय है।

उदाहरण 2 : समीकरण निकाय को हल करो :

$$3x-2y+3z=4$$
$$2x+y-z=1$$
$$4x-3y+2z=4$$

हल : समीकरण निकाय को आव्यूह-रूप $AX=B$ में व्यक्त करो, जहाँ,

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ तथा, } B=\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

अब,

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$
$$=-3+16-30=-17\neq 0$$

अत: A व्युत्क्रमणीय है और इसका व्युत्क्रम अस्तित्व रखता है।

A का व्युत्क्रम ज्ञात करने के लिए हम देखते हैं कि,

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=-1,\ A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-8,\ A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=-10$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=-5,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-6,\ A_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=1$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=9,\quad A_{33}=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=7$$

अत: सहखण्डज $A=\begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

अत: $A^{-1}=\dfrac{\text{सहखण्डज } A}{|A|}=\dfrac{1}{-17}\begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

तथा $X=A^{-1}B=\frac{1}{-17}\begin{pmatrix}-1 & -5 & -1 & 8\\ -8 & -6 & 9 & 1\\ -10 & 1 & 7 & 4\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{-17}\begin{pmatrix}-17\\ -34\\ -51\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि,

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

और इस प्रकार, $x=1$, $y=2$ तथा $z=3$, समीकरण निकाय का हल है।

उदाहरण : 3 समीकरण निकाय को हल करो,

$$7x+2y=9$$
$$14x+4y=10$$

हल : इसको आव्यूह रूप $AX=B$ में व्यक्त करो, जहाँ,

$$A=\begin{pmatrix}7 & 2\\ 14 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}9\\ 10\end{pmatrix}\ \text{तथा}\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

हम देखते हैं कि, $|A|=\begin{vmatrix}7 & 2\\ 14 & 4\end{vmatrix}=28-28=0$

अत: A एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है। इस प्रकार, हम A का व्युत्क्रम नहीं ज्ञात कर सकते। यह समीकरण निकाय वह उदाहरण है जिसमें गुणांक आव्यूह अव्युत्क्रमणीय है और समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है। यह असंगत समीकरण निकाय है।

उदाहरण 4 : समीकरण निकाय

$$3x+\ y=4$$
$$6x+2y=8$$

को हल करो।

हल : इस निकाय को आव्यूह के रूप में व्यक्त करने पर, हम देखते हैं कि $AX=B$ जहाँ,

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 6 & 2\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\ \text{तथा}\ B=\begin{pmatrix}4\\ 8\end{pmatrix}$$

अब, $|A|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 6 & 2\end{vmatrix}=6-6=0$

अत: A के व्युत्क्रम का अस्तित्व नहीं है। परन्तु इसका अर्थ यह नहीं है कि समीकरण निकाय का होई हल नहीं है। यह उस समीकरण निकाय का उदाहरण है जिसका गुणांक आव्यूह अव्युत्क्रमणीय है परन्तु उसके अपरिमित हल हैं। उदाहरण स्वरूप, $x=0$, $y=4$; $x=\frac{4}{3}$, $y=0$; $x=1$, $y=1$। इत्यादि उस समीकरण निकाय के कुछ हल हैं। यह समीकरण निकाय संगत है।

टिप्पणी : जब गुणांक आव्यूह अव्युत्क्रमणीय होता है तो दो संभावनायें हैं : (i) समीकरण निकाय का कोई हल नहीं होता जैसा कि उदाहरण 3 से विदित है, तथा (ii) समीकरण निकाय के अपरिमित हल होते हैं जैसा कि उदाहरण 4 से विदित है।

6.8 ज्यामितीय रूपान्तरण तथा आव्यूह (Geometric Transformations and Matrices)

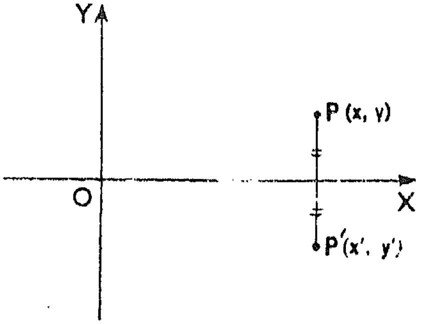
हमने पूर्व कक्षाओं में, कुछ रूपान्तरणों (transformations) [परावर्तन, घूर्णन, विवर्धन, रूपान्तरण] का अध्ययन किया है। इस परिच्छेद में, हम यह देखेंगे कि, ये रूपान्तरण किस प्रकार आव्यूहों से प्रदर्शित किए जा सकते हैं और तब आव्यूहों की सहायता से उनके कुछ गुणों की विवेचना करेंगे।

रूपान्तरण दो प्रकार के हैं, **बीजीय (algebraic)** तथा **ज्यामितीय (geometric)**। साधारणतया **बीजीय रूपान्तरण**, वे रूपान्तरण हैं, जिनमें कुछ ज्यामितीय आकृतियाँ दो निर्देशांक पद्धतियों से उल्लिखित होती हैं और हम इन विनिमय निर्देशांकों में सम्बन्ध ज्ञात करते है।

ज्यामितीय रूपान्तरण, वह रूपान्तरण है जिसमें बीजीय सम्बन्ध दो विभिन्न आकृतियों के बिन्दुओं के बीच संगति की स्थापना करते हैं और हम इन आकृतियों में ज्यामितीय सम्बन्ध स्थापित करते हैं। इस परिच्छेद में, हम ज्यामितीय रूपान्तरण पर विचार करेंगे।

अक्षों का परावर्तन (Reflection in the axes)

माना, बिन्दु P (x, y), x-अक्ष के परावर्तन से बिन्दु $P'(x', y')$ में रूपान्तरित होता है। x-अक्ष के परावर्तन से बिन्दु P बिन्दु P′में इस प्रकार रूपान्तरित होता है कि x अक्ष रेखाखण्ड $\overline{PP'}$ का लम्बार्धक है जैसा कि आकृति 6·1 में दिखाया गया है।



आकृति 6.1

यदि P के नियामक (x, y) हों तो P′ के नियामक $(x, -y)$ होंगे।

अतः $$x' = x$$
$$y' = -y$$

उपरोक्त समीकरणों को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :

$$x' = 1.x + 0.y$$
$$y' = 0.x - 1.y$$

आव्यूह रूप में इसको हम निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

इसलिए, आव्यूह $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ एक विशिष्ट रूपान्तरण को व्यक्त करता है जिसे **x-अक्ष का परावर्तन** कहते हैं।

इसी प्रकार, y-अक्ष का परावर्तन, आव्यूह $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ से, व्यक्त होता है क्योंकि इस परावर्तन के अन्तर्गत (x, y), $(-x, y)$ में रूपान्तरित होता है।

पुनः चूँकि मूल बिन्दु से जाने वाला, बिन्दु (x, y) का परावर्तन $(-x, -y)$ है, इसलिए **इस रूपान्तरण को व्यक्त करने वाली आव्यूह $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ है (क्यों ?)**

मूल बिन्दु के परितः घूर्णन (Rotation about the origin)

90° पर घूर्णन (Rotation through 90°)

आकृति 6·2 में दिखाये गये समतल के बिन्दु P (x, y) पर विचार करो।

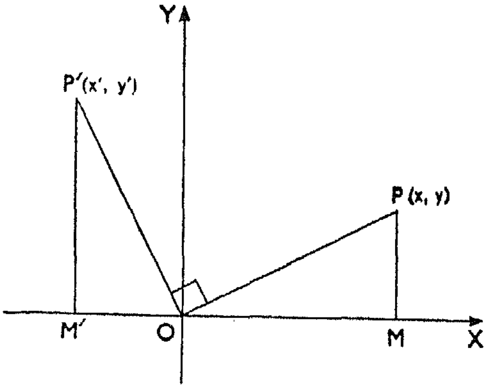
O तथा P को मिलाओ और उसे 90° के कोण पर वामावर्त दिशा में घुमाओ। मान लो P की नयी स्थिति P′ (x', y') है। लम्ब PM तथा P′M′ खींचो। चूँकि त्रिभुज POM तथा P′OM′ सर्वांगसम हैं, हम

$$x' = -y$$
$$y' = x$$

प्राप्त करते हैं।

इन समीकरणों को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$x' = 0 \cdot x - 1 \cdot y$$
$$y' = 1 \cdot x + 0 \cdot y$$



आकृति 6.2

उपरोक्त समीकरणों को आव्यूह रूप में लिखने पर हम देखते हैं कि

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

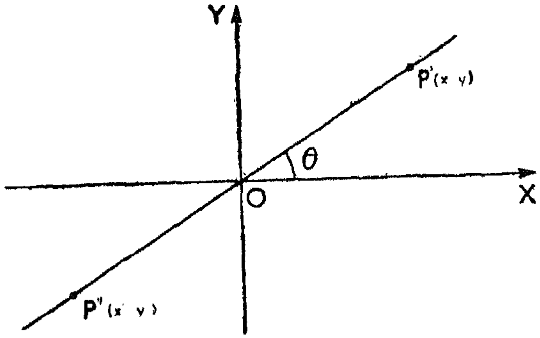
इसलिए **मूलबिन्दु के परितः 90° पर वामावर्त घूर्णन आव्यूह $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ से व्यक्त होता है।**

180° पर घूर्णन (Rotation through 180°)

माना समतल में कोई बिन्दु P (x, y) है और $OP=r$ तथा $\angle POX=\theta$ तब

$$x=r \cos \theta$$

$$y=r \sin \theta$$



आकृति 6.3

अब OP को 180° के कोण पर घुमाओ। माना P की नयी स्थिति P' (x', y') है तब,

$$x'=r \cos (180°+\theta)$$
$$=-r \cos \theta$$
$$=-x$$

और

$$y =r \sin (180°+\theta)$$
$$=-r \cos \theta$$
$$=-y$$

इन समीकरणों को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$x'==1.x+0.y$$
$$y'=0.x-1.y$$

आव्यूह रूप में व्यक्त करने पर हम देखते हैं कि

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

इस प्रकार, **मूलबिन्दु के परितः एक बिन्दु का 180° पर घूर्णन आव्यूह**

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1.I=-I$$

से व्यक्त होता है।

कोण α पर घूर्णन (Rotation through an angle α)

माना P एक बिन्दु है जिसके नियामक (x, y) हैं। माना $OP=r$ तथा $\angle POX=\beta$ 1 OP को α कोण पर घुमाओ। माना P की नयी स्थिति P' (x', y') है।

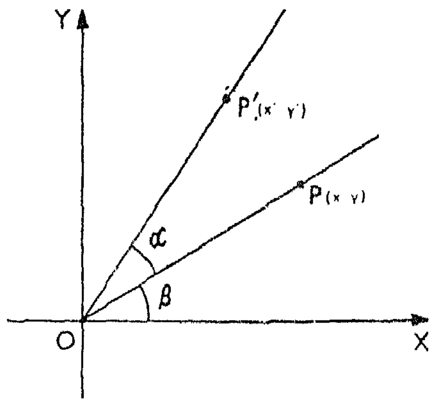
तब, $x' = r\cos(\beta+\alpha) = r\cos\beta\cos\alpha - r\sin\beta\sin\alpha$

तथा $y' = r\sin(\beta+\alpha) = r\sin\beta\cos\alpha + r\cos\beta\sin\alpha$

चूंकि $x = r\cos\beta$ तथा $y = r\sin\beta$ उपरोक्त समीकरण निम्न प्रकार लिखे जा सकते हैं।

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

तथा $$y' = y\cos\alpha + x\sin\alpha$$



आकृति 6.4

इसको आव्यूह रूप में व्यक्त करने पर

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

प्राप्त होता है। इस प्रकार, **मूलबिन्दु के परितः, रेखाखण्ड OP का कोण** α **पर वामावर्त घूर्णन आव्यूह**

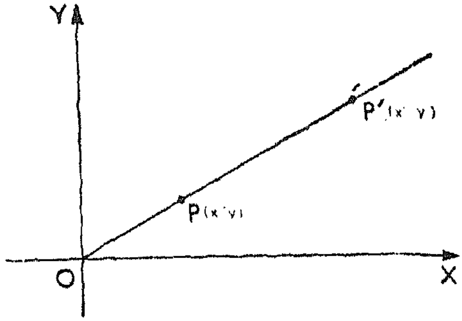
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

से व्यक्त होता है।

$\alpha = 90^\circ$ तथा $\alpha = 180^\circ$ रखने पर हम पहले के दोनों 90° तथा 180° पर के घूर्णन प्राप्त करते हैं जो आव्यूह $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ तथा $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ से व्यक्त होते हैं।

α की जगह $-\alpha$ प्रतिस्थापित करने पर हम आव्यूह $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ प्राप्त करते हैं जो **मूलबिन्दु के परितः कोण** α **पर दक्षिणावर्त घूर्णन प्रदर्शित करता है।**

विवर्धन (Enlargement) : एक बिन्दु P लो। O तथा P को मिलाओ तथा OP को P′ तक इस प्रकार बढ़ाओ कि $OP' = kOP$, $(k \neq 0)$ माना P′ के नियामक (x', y') हैं।



आकृति 6.5

तब $x' = kx$ (क्यों ?)

$y' = ky$

इन समीकरणों को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$x' = k.x + 0.y$$
$$y' = 0.x + k.y$$

आव्यूह रूप से व्यक्त करने पर, हम देखते हैं कि

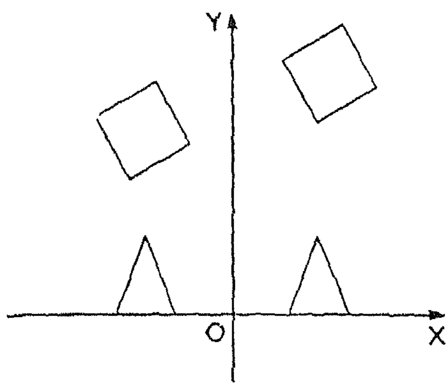
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

इसलिए, रेखाखण्ड OP का विवर्धन आव्यूह $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = KI$ से व्यक्त होता है।

स्थानान्तरण (Translation) : **स्थानान्तरण** वह रूपान्तरण है जो बिन्दु P को निश्चित दूरी पर निश्चित दिशा में स्थानान्तरित करता है। इसके प्रभाव से समतल में कोई विशिष्ट आकृति बिना अपने आकार और माप में परिवर्तन के स्थानान्तरित होती हैं (आकृति 6.6 देखें)।

उदाहरणस्वरूप, रूपान्तरण,

$$x' = x + h$$
$$y' = y + k$$

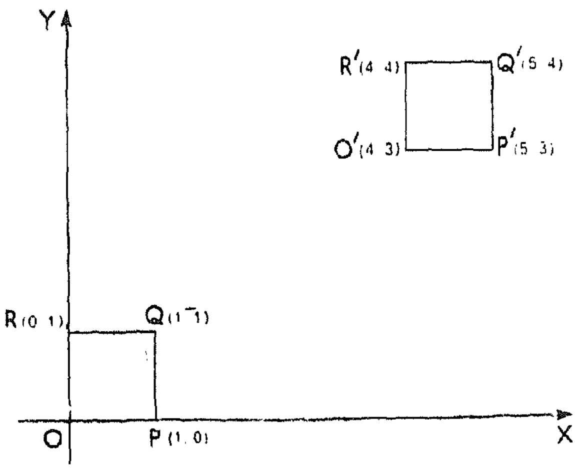


आकृति 6.6

जहाँ h तथा k वास्तविक संख्यायें हैं बिन्दु (x, y) को नये बिन्दु (x', y') में रूपान्तरित करता है। यदि $h=4$, $k=3$ तो एक वर्ग के शीर्ष O (0, 0), P (1, 0), Q (1, 1) तथा R (0, 1), O′ (0+4, 0+3), P′ (1+4, 0+3), Q′ (1+4, 1+3) तथा R′ (0+4, 1+3) अर्थात् O′ (4, 3); P′ (5, 3), Q′ (5, 4) और R′ (4, 4) में रूपान्तरित होते हैं (आकृति 6.7 देखो)।

यदि $0 \leqslant x \leqslant 1$ तब x', h तथा $1+h$ के मध्य स्थित होगा। इसी प्रकार यदि $0 \leqslant y \leqslant 1$, $k \leqslant y \leqslant 1+k$ में स्थानांतरित होता है। उपर्युक्त स्थानान्तरण एक 3×3 आव्यूह द्वारा प्रदर्शित किया जाता है जो निम्न हैं।

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$



आकृति 6·7

उदाहरण 1 : P तथा Q बिन्दुओं के नियामक क्रमशः (1, 1) तथा (3, 3) हैं। रूपान्तरण $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ की सहायता से P तथा Q को बिन्दु P* और Q* में रूपान्तरित करो।

हल : माना बिन्दु P* के नियामक (x, y) हैं, तब

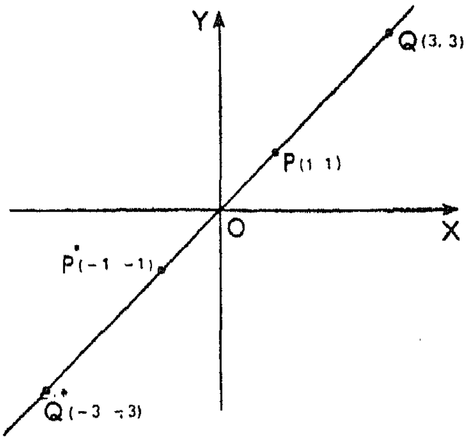
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

इस प्रकार, P* के नियामक (−1, −1) हैं। इसी प्रकार, यदि Q* के नियामक (x', y') हों तो

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

अतः Q* के नियामक (−3, −3) हैं।

हम देखते हैं कि, यह रूपान्तरण एक घूर्णन रूपान्तर है क्योंकि रेखा OP तथा OQ, 180° पर घुमाई जाती है (आकृति 6·8 देखो)।



आकृति 6.8

उदाहरण 2 : शीर्ष (0, 0), (0, 1), (1, 1) तथा (1, 0) वाले वर्ग पर रूपान्तरण $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ का प्रभाव ज्ञात करो।

हल : अब,

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

अर्थात् (0, 0), (0, 0) में रूपान्तरित होता है :

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

अर्थात् (0, 1), (0,−1) में रूपान्तरित होता है,

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

अर्थात् (1, 1), (1,−1) में रूपान्तरित होता है और

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

अर्थात् (1, 0), (1, 0) में रूपान्तरित होता है।

रूपान्तरण-संयोजन (Composition of transformation)

माना (x, y), (x', y') में रूपान्तरित होता है, जहाँ पर

$$\left.\begin{aligned}ax+by&=x'\\cx+dy&=y'\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

आव्यूह-रूप में व्यक्त करने पर, हम देखते हैं कि

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (2)$$

अब माना (x', y'), (x'', y'') में रूपान्तरित होता है, जहाँ पर

$$\left.\begin{aligned} px'+qy' &= x'' \\ rx' = sy' &= y'' \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

या $$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \quad (4)$$

(1) की सहायता से (3) को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$p(ax+by)+q(cx+dy)=x''$$
$$r(ax+by)+s(cx+dy)=y''$$

या, $$\left.\begin{aligned} (pa+qc)x+(pb+qd)y &= x'' \\ (ra+sc)x+(rb+sd)y &= y'' \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

या, $$\begin{pmatrix} pa+qc & pb+qd \\ ra+sc & rb+sd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \quad (6)$$

अतः $$\begin{pmatrix} pa+qc & pb+qd \\ ra+sc & rb+sd \end{pmatrix} \quad (7)$$

अभीष्ट रूपान्तरण आव्यूह है, जो (x, y) को (x'', y'') में रूपान्तरित करता है।

(2) तथा (4) से हम देखते हैं कि

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \quad (8)$$

(6) तथा (8) की तुलना करने पर, हम देखते हैं कि

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa+qc & pb+qd \\ ra+sc & rb+sd \end{pmatrix}$$

इस प्रकार, (7) में दिया हुआ आव्यूह, दो रूपान्तरण आव्यूहों का, संयोजन प्रदर्शित करता है।

उदाहरण 3 : सिद्ध करो कि मूल बिन्दु से जाने वाली किसी रेखा OP का 180° पर घूर्णन 90° पर दो घूर्णनों के बराबर होता है।

हल : वास्तव में, हमको यह दिखाया है कि 90° पर के घूर्णन को व्यक्त करने वाले आव्यूह का उसी के साथ संयोजन आव्यूह $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ से व्यक्त होगा।

90° पर से घूर्णनों को व्यक्त करने वाला आव्यूह

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ है।}$$

परन्तु $$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

जो अभीष्ट हल है।

उदाहरण 4 : रूपान्तरण S.T तथा TS के आव्यूह ज्ञात करो, जहाँ S, 60° पर घूर्णन है और T, y-अक्ष में परावर्तन है।

हल : S का आव्यूह

$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

है तथा T का आव्यूह $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ है।

इसलिए, रूपान्तरण ST का आव्यूह निम्न है :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

दूसरी तरफ, TS का आव्यूह

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ है।}$$

ध्यान रखें कि ST तथा TS के आव्यूह भिन्न हैं जिससे निष्कर्ष निकलता है कि रूपान्तरण-संयोजन क्रमविनिमेय नियम का पालन नहीं करता।

प्रश्नावली 6.2

1. यदि किसी आव्यूह में 24 अवयव हों तो उसकी कितनी विमा (कोटि) संभव है ? यदि उसके 13 अवयव हों तो संभव कोटि ज्ञात करो।
2. एक 3×4 आव्यूह की रचना करो जिसके अवयव a_{ij} निम्न हैं :
   (*i*) $a_{ij} = i + j$ (*ii*) $a_{ij} = i \cdot j$
   (*iii*) $a_{ij} = i . j$ (*iv*) $a_{ij} = \frac{i}{j}$
3. यदि $\begin{pmatrix} x & 3x-y \\ 2x+z & 3y-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$
   तो x, y, z, w के मान ज्ञात करो।
4. यदि $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
   तो निम्नांकित में से प्रत्येक को ज्ञात करो।
   (*i*) $2B + 3C$ (*ii*) $-2A + B + C'$
   (*iii*) $A' + B$ (*iv*) $A' - B + C'$
   (*v*) $A + B + C$ (*vi*) $(A+B)'$, क्या $(A+B)' = A' + B'$?
   सत्य है ?

5. यदि,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

तो निम्नांकित में प्रत्येक को ज्ञात करो :

(i) $2B-3C$ (ii) $A-2B+3C$

(iii) $(A+C)'$ (iv) $2A'-B'$

(v) $(A+B+C)'$; क्या $(A+B+C)'=A'+B'+C'$? सत्य है ?

6. अभ्यास (i) से (v) तक के आव्यूहों को जोड़ो :

(i) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} x^2+y^2 & y^2+z^2 \\ x^2+z^2 & x^2+y^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2xy & 2yz \\ 2zx & -2xy \end{pmatrix}$

7. निम्नांकित गुणनफलों का अभिकलन करो :

(i) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ 2 & b & 0 \\ -3 & c & 2 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

(iv) $(2 \quad 3 \quad -1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

8. निम्नांकित का मान बताओ :

(i) $\Big((1 \quad 2)+5\,(3 \quad 4)\Big)\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

(ii) $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(iii) $\left((1 \quad 2)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) + (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iv) $(1 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

9. दिखाओ कि

(i) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

10. निम्नांकित आव्यूहों में प्रत्येक का व्युत्क्रम ज्ञात करो :

(i) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} x^3 & x^2 \\ -x^3 & x^2 \end{pmatrix}$ (v) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 2 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

11. आव्यूह-पद्धति से निम्नांकित समीकरण निकायों का हल ज्ञात करो :

(i) $5x + 2y = 4$
$7x + 3y = 5$

(ii) $2x - y = -2$
$3x + 4y = 3$

(iii) $4x - 3y = 3$
$3x - 5y = 7$

(iv) $5x + 2y = 3$
$3x + 2y = 5$

(v) $2x + y + z = 1$
$x - 2y - z = \frac{3}{2}$
$3y - 5z = 9$

(vi) $x - y + z = 4$
$2x + y - 3z = 0$
$x + y + z = 2$

12. यदि, α तथा β वास्तविक संख्याएँ और A तथा B, 3×2 कोटि के आव्यूह हैं तो दिखाओ कि

(i) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

(ii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

(iii) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha)A$

13. आव्यूह-समीकरणों को हल करो :

(i) $\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$

(ii) $(x \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 5 \end{pmatrix} = (0)$

14. यदि $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ तथा $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ तो क्या $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ सत्य है ?

15. एक न्यास-निधि में 30,000 रुपये हैं, जिनको दो विभिन्न प्रकार के ऋण-पत्रों में लगाना है। पहले ऋण-पत्र पर 5 प्रतिशत प्रतिवर्ष तथा दूसरे पर 7 प्रतिशत प्रतिवर्ष ब्याज मिलता है। आव्यूह-गुणन की विधि से ज्ञात करो कि 30,000 रुपये को दो विभिन्न ऋण-पत्रों में किस प्रकार विभक्त किया जाय कि सम्पूर्ण वार्षिक ब्याज (*a*) 1800 रु० (*b*) 2000 रु० (*c*) 1600 रु० प्राप्त हो।

16. तीन दुकानदार A, B, C एक विक्रय केन्द्र में लेखन-सामग्री खरीदने के लिए जाते हैं। दुकानदार A, 12 दर्जन अभ्यास पुस्तिकाएँ, 5 दर्जन कलमें तथा 6 दर्जन पेंसिलें खरीदता है। दुकानदार B, 10 दर्जन अभ्यास पुस्तिकाएँ, 6 दर्जन कलमें तथा 7 दर्जन पेन्सलें खरीदता है। दुकानदार C, 11 दर्जन अभ्यास पुस्तिकाएँ, 13 दर्जन कलमें तथा 8 दर्जन पेन्सिलें खरीदता है। प्रत्येक अभ्यास पुस्तिका का मूल्य 40 पैसे, प्रत्येक कलम का मूल्य 1.25 रुपये तथा प्रत्येक पेन्सिल का मूल्य 35 पैसे हैं।

(*a*) इनमें से प्रत्येक व्यक्ति की खरीद को पंक्ति-सदिश तथा खरीद-मूल्य को स्तम्भ सदिश से प्रदर्शित करो।

(*b*) आव्यूह-गुणन की सहायता से प्रत्येक व्यक्ति द्वारा भुगतान होने वाली राशि ज्ञात करो।

17. एक विशिष्ट सेण्ट्रल स्कूल के सहकारी विक्रय-केन्द्र में नवीं कक्षा की गणित की 10 दर्जन, दसवीं कक्षा की गणित की 8 दर्जन तथा पाँचवीं कक्षा की गणित-परिज्ञान (Insight into mathematics) की 5 दर्जन पुस्तकें हैं। इनमें से प्रत्येक का बिक्री मूल्य क्रमश: 8.30 रुपये, 3.45 रुपये तथा 4.50 रुपये है। सभी पुस्तकों की बिक्री से विक्रय केन्द्र को कुल कितनी धनराशि प्राप्त होगी ?

18. किसी बिन्दु A के नियमाक (3, 3) तथा B के (5,5) हैं। A तथा B को निम्नांकित आव्यूहों की सहायता से रूपान्तरित करो।

(*a*) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (*b*) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (*c*) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (*d*) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(*e*) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (*f*) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (*g*) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

19. निम्नांकित आव्यूहों का प्रभाव, शीर्ष (0, 0), (3, 2), (2, 3) वाले त्रिभुज पर, ज्ञात करो :

(*a*) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (*b*) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (*c*) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

प्रत्येक रूपान्तरण का प्रभाव ज्यामितीय ढंग से उल्लेख करो।

20. निम्नांकित आव्यूहों का प्रभाव, शीर्ष (0, 0), (0, 1), (1, 1) तथा (1, 0) वाले वर्ग पर, ज्ञात करो :

$(a)\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ $(b)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(c)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$(d)\quad\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

21. $45°$, $120°$ तथा $270°$ के घूर्णन के लिए आव्यूहों को लिखो।

22. निम्नांकित रूपान्तरणों S तथा T का संयोजन लिखो :

(*i*) S : $45°$ पर घूर्णन

T : x-अक्ष में परावर्तन

(*ii*) S : y-अक्ष में परावर्तन

T : $120°$ पर घूर्णन

23. यदि, $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ तथा $B=\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

हो तो, दर्शाइये कि $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(एक ही कोटि के वर्ग आव्यूह A तथा B के लिए $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ व्यापक रूप में सत्य है।)

24. यदि, $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ तो A^{-1} ज्ञात करो। $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ का सत्यापन करो।

25. दिये हुए आव्यूह A, B तथा C के लिए, जहाँ पर

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ तथा } C=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

दिखाओ कि (*i*) $A^2=I$ (*ii*) $B^4=0$ तथा (*iii*) $C^2=C$

6.9 सारणिकों की उत्पत्ति, युगपत् रैखिक समीकरणों को हल करने की विधि से, हुयी। 1100 ई० पूर्व चीनियों ने, दो अज्ञात राशियों वाले दो रैखिक समीकरणों को हल करने की एक विधि का उल्लेख किया है जो वर्तमान विधि के ही समकक्ष है। सारणिकों के लिए परिकल्पित पूर्वानुमान का प्रथम साक्ष्य, 17वीं शताब्दी के लिए महान् जापानी गणितज्ञ सेकी कोवा (Seki Kowa) द्वारा 1683 में लिखित पुस्तक Kai Fukudai no HO में, मिलता है। फिर भी, सारणिकों के सिद्धान्त का प्रारम्भ, जी० डब्लू० (G. W. Leibnitg) [1646—1716] से माना जा सकता है, जिसने चीनीओं के समकक्ष ही युगपत् रैखिक समीकरणों के हल के लिए एक नियम का प्रतिपादन किया। इस नियम का प्रवर्धन, एक स्वीस गणितज्ञ जी० क्रेमर (G. Cramer) [1704—1752] ने, 1760 में, किया। 1764 में, एक फ्रांसीसी गणितज्ञ ई० बिजोट (E. Bezout) [1730—1783] ने, इस नियम का सरल रूप, प्रस्तुत किया। सर्वप्रथम, सारणिकों का क्रमबद्ध अध्ययन 1771 में ए० टी० वारण्डेरमाण्डे (A. T. Vandermonde) [1735—1796] ने किया। 1772 में पी० एस० लाप्लास (P. S. Laplace) [1749—1827] ने, सारणिक को उप-सारणिक की सहायता से प्रसार करने की व्यापक विधि का, वर्णन किया। 1773 में, जे० एल० लागराज (J. L. Langrange) [1736—1813] ने, कोटि 2 तथा 3 के सारणिकों का प्रयोग, समीकरण हल करने के अतिरिक्त दूसरे कार्यों में किया। कार्ल एफ गौस (Carl F. Gauss) [1777—1855] ने, सारणिकों का प्रयोग, संख्या सिद्धान्त में किया।

ए० एल० कोशा (A. L. Cauchy) [1789—1857], वह पहला व्यक्ति था, जिसने अपने एक शोध पत्र में सारणिक शब्द का प्रयोग किया और उसको नवम्बर 30, 1812 में फ्रेंच एकेडमी में प्रस्तुत किया।

कोशी के अतिरिक्त, सारणिक सिद्धान्त में जिसका महत्त्वपूर्ण योगदान है, वह सी० जी० जे० जैकोबी (C. J. J. Jacobi) [1804—1851] है। जैकोबी के बाद, जे० जे० सैलवेस्टर (J. J. Sylvester) [1814—1897] तथा आर्थर केली (Arthur Cayley) [1821—1895] ने भी इस सिद्धान्त में बहुत कुछ योगदान दिए हैं।

जेम्स जोसेफ सैलवेस्टर (1814—1897), जो अपनी कृतियों तथा आविष्कारों को कल्पनापूर्ण नाम देने के लिए आसक्त माना जाता था, 1850 में, कुछ पदों एवं व्यंजकों को एक आयताकार विन्यास के रूप में उद्धृत किया। उसने, इस आयताकार विन्यास का नाम आव्यूह दिया। शीघ्र ही, दूसरे गणितज्ञों ने भी इसको मान्यता दी कि आव्यूहों का उपयोग सुगमता से संख्याओं को विकसित करने में सहायक है। इस दिशा में, विशेष रूप से, सर विलियम रावन हैमिल्टन (Sir William Rowen Hamilton) [1805—1865] तथा आर्थर केली (1821—1895) के नाम उल्लेखनीय हैं। सर हैमिल्टन ने, 1853 में तथा आर्थर केली ने, 1858 में, आव्यूह सिद्धान्त में महत्त्वपूर्ण योगदान दिए।

यह कितना दिलचस्प तथ्य है, कि केली ने 1849 में वकालत पास किया चौदह वर्षों तक बकालत की। इन चौदह वर्षों में, केली ने, गणित में 200 तथा 300 के बीच शोध पत्रों को, प्रकाशित किया। उसमें से अनेक अब बहुत चिरप्रतिष्ठित माने जाते हैं।

आव्यूहों का उद्भव, मात्र सूचना संग्रहागार के रूप में हुआ था परन्तु आज आव्यूहों का, केवल गणित में ही नहीं बल्कि जीव विज्ञान, समाज विज्ञान, अर्थशास्त्र, क्वाण्टम यांत्रिकी, मनोविज्ञान तथा संख्यिकी में वृहद् उपयोग है।

अध्याय 7

निर्देशांक ज्यामिति

7.1 भूमिका (Introduction)

300 ई० पूर्व के करीब यूक्लिड (Euclid) ने ज्यामिति पर अपनी पुस्तक लिखी। वह ज्यामितीय संकल्पनाओं को अभिगृहीती निकाय का स्वरूप देने वाला पहला व्यक्ति था। यूक्लिड की ज्यामिति में, भौतिक महत्त्व से प्रभावित कुछ विशेष स्वयं सिद्धियों पर आधारित ज्यामितीय आकृतियों का अध्ययन किया गया।

प्राचीन भारतीयों एवं ग्रीकों द्वारा प्रारम्भ में प्रतिपादित ज्यामिति में बीजगणित की विधियों का मुख्यत: कोई प्रयोग नहीं था। सच बात तो यह है कि यूक्लिड, शुल्ब सूत्र इत्यादि प्रतिपादित द्वारा ज्यामिति में, संश्लेषण विधि का प्रयोग कोई 1300 वर्षों तक होता रहा जब तक कि फ्रांसीसी गणितज्ञ एवं दार्शनिक रेने डीकार्ट (Rene Descartes) [1596-1650] ने 1637 में अपनी पुस्तक 'La Geometric' प्रकाशित किया। एक दूसरे फ्रांसीसी गणितज्ञ पियरे डी फर्मट (Pierre de Fermet) [1601-1665] को भी निर्देशांक ज्यामिति के अन्वेषण का श्रेय प्राप्त है। फिर भी उसने अपने कार्यों को प्रकाशित कराने की कभी भी चिन्ता नहीं की। उसके कार्यों की जानकारी लोगों को उसकी मृत्यु के बाद हुयी। डीकार्ट ने अपने ज्यामिति के अध्ययन में बीजगणित के क्रमबद्ध एवं समुचित प्रयोग से विश्लेषणात्मक विधि को प्रस्तुत किया। उसने बीजगणित और ज्यामिति के अभिनव संयोग से कलन की नींव डाली। बीजगणित एवं ज्यामिति का यह मिलाप **विश्लेषणात्मक** या **निर्देशांक ज्यामिति** के नाम से जाना जाता है। दिलचस्प बात तो यह है, कि. डीकार्ट का विश्लेषणात्मक ज्यामिति पर प्रकाशित कार्य दर्शनशास्त्र की वृहद् पुस्तक की एक परिशेषिका मात्र था। उसकी पुस्तक, निर्देशांक या विश्लेषणात्मक ज्यामिति का प्रथम लेखा, प्रादन करती है।

निर्देशांक ज्यामिति एवं हाई स्कूल में पढ़ी हुयी ज्यामिति की प्रक्रियाओं में भिन्नता है। इनमें से पहली ज्यामिति में, निर्देशांक पद्धति का प्रयोग होता है और वह बिन्दुओं, रेखाओं, वक्रों, कोणों एवं समतल में क्षेत्रफलों के अध्ययन को अन्तर्विष्ट करती है।

निर्देशांक ज्यामिति के मौलिक विचारों एवं डीकार्ट के स्वयं के योगनान की सहायता से, समतल में, बिन्दुओं को वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्मों तथा रेखाओं एवं वक्रों को बीजीय समीकरणों की सहायता से व्यक्त किया जाता है। प्रस्तुत अध्याय में, हम इन्ही तथ्यों का अध्ययन करेंगे।

7.2 दिष्ट रेखाखण्ड (Directed line Segment)

समतल ज्यामिति के अध्ययन में, हम किसी रेखाखण्ड की लम्बाई से ही सम्बन्ध रखते हैं। उसकी विशिष्ट दशा का उल्लेख नहीं करते। निर्देशांक ज्यामिति के अध्ययन में, लम्बाई और दिशा दोनों का ज्ञान

आवश्यक है। जब हम किसी रेखाखण्ड की लम्बाई एवं दिशा दोनों का उल्लेख करते हैं तो उसको दिष्ट रेखाखंड कहते हैं।

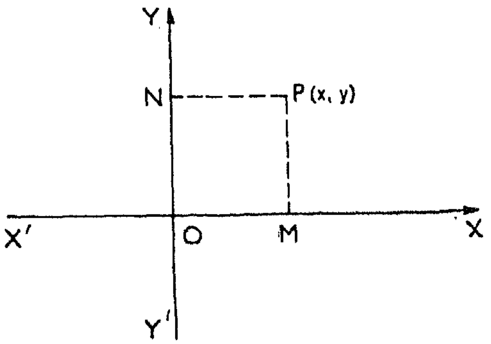
परिभाषा 7.2.1 : माना, O तथा A एक समतल में दो बिन्दु हैं। तब रेखाखण्ड **OA** जो, O से A तक निर्देशित है, दिष्ट रेखाखण्ड कहलाती है।

उपरोक्त परिभाषा के आधार पर, **OA = – OA.**

कार्त्तीय निर्देशांक पद्धति (Cartesian Coordinate System)

कार्त्तीय निर्देशांक पद्धति, या आयताकार निर्देशांक पद्धति, जिसका नामकरण महान फ्रांसीसी गणितज्ञ रेने डीकार्ट के नाम पर हुआ है, का आधार परस्पर लम्बवत् दिष्ट रेखाओं का युग्म है, जिन्हें निर्देशांक अक्ष (coordinate axes) कहते हैं। क्षैतिज रेखा को **x-अक्ष,** ऊर्ध्वाधर रेखा को **y-अक्ष** तथा उनके प्रतिच्छेद बिन्दु **मूल बिन्दु (origin)** हैं। दोनों अक्षों के क्रमशः दायें तथा ऊपर की तरफ धनात्मक दिशा लेने की प्रथा है।

माना X'X तथा Y'Y निर्देशांक अक्ष है, जो बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। माना, समतल में P कोई बिन्दु है। P से X'X तथा Y'Y अक्षों पर उनसे क्रमशः M तथा N पर मिलाने वाले लम्ब PM तथा PN खींचो (चित्र 7.1 देखें)।



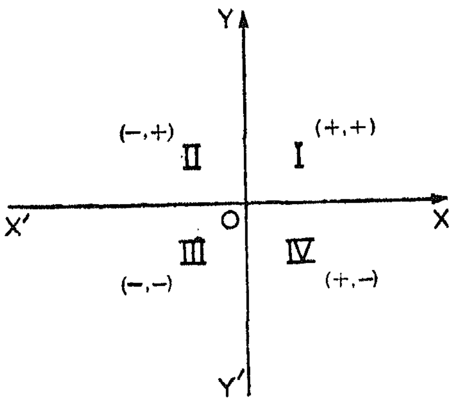
आकृति 7.1

दिष्ट रेखा खण्ड OM की लम्बाई, जो x-अक्ष पर चुनी हुयी स्केल की इकाइयों में नापी जाती है, P का अक्ष **x-निर्देशांक** या **भुज (abscissa)** कहलाती है। इसी तरह, दिष्ट रेखाखण्ड ON की लम्बाई, जो y-अक्ष पर चुनी हुयी स्केल की इकाइयों में नापी जाती है, P का **y-निर्देशांक** या **कोटि (ordinate)** कहलाती है। यदि, OM तथा ON की लम्बाई क्रमशः तथा y हो तो निर्देशांक अक्षों के सन्दर्भ में, समतल में बिन्दु P की स्थिति को वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्म (x, y) से निर्धारित किया जाता है। कोष्ठक में भुज को पहले लिखने की परम्परा है। x तथा y संख्याओं का युग्म (x, y) बिन्दु P के निर्देशांक कहलाते हैं।

एक बार निर्देशांक अक्षों को चुन लेने के बाद, समतल का प्रत्येक बिन्दु, संख्याओं के एक अद्वितीय क्रमित युग्म के, तदनुरूपी होता है और विलोमतः संख्याओं के प्रत्येक क्रमित युग्म के तदनुरूपी समतल में एक अद्वितीय

बिन्दु होता है। उपरोक्त तथ्य, बीजगणित की विधियों को ज्यामिति के अध्ययन में प्रयुक्त करने में सहायक है।

ध्यान रखें कि, दोनों अक्ष समतल को चार चतुर्थांशों (quadrants) में विभक्त करते हैं। आकृति 7.2 में, OX को धनात्मक x-अक्ष, OX′ को ऋणात्मक x-अक्ष, OY को धनात्मक y-अक्ष तथा OY′ को ऋणात्मक y-अक्ष लिया गया है। चतुर्थांशों XOY, YOX′, X′OY′ तथा Y′OX को क्रमशः, I, II, III, तथा IV चतुर्थांश कहते हैं। परम्परागत रूप से, पहले चतुर्थांश में, दोनों निर्देशाँक धनात्मक, तीसरे चतुर्थांश में, दोनों निर्देशांक ऋणात्मक, दूसरे चतुर्थांश में, x-निर्देशांक, ऋणात्मक तथा y-निर्देशांक धनात्मक तथा चौथे चतुर्थांश में, x निर्देशांक, धनात्मक एवं y-निर्देशांक, ऋणात्मक लिया जाता है (आकृति 7.2 देखें)।



आकृति 7.2

इस प्रकार, बिन्दु (3, 4), (−1, 3), (−5, −7) तथा (5 −9.1) क्रमशः पहले, दूसरे, तीसरे तथा चौथे चतुर्थांशों में अवस्थित हैं। धन तथा ऋण चिन्हों की परम्परा, भुज तथा कोटि की उपरोक्त वर्णित दिष्ट रेखाओं के पदों में दी गई परिभाषा पर आधारित है। धनात्मक दिशाओं को मूल बिन्दु से दाहिनी एवं ऊपर की तरफ नापा जाता है।

7.3 दो बिन्दुओं के बीच की दूरी

हमें दो बिन्दुओं के बीच की दूरी ज्ञात करने की आवश्यकता होगी। इसके लिए, हम एक सूत्र की स्थापना करते हैं। बिन्दु P (x, y) से हमारा तात्पर्य उस बिन्दु से है जिसके निर्देशांक x तथा y हैं।

प्रमेय *7.3.1* : P (x_1, y_1) तथा Q (x_2, y_2) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड PQ की लम्बाई,

$$PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (1)$$

से दी जाती है, जहाँ पर वर्गमूल को धनात्मक लिया जाता है।

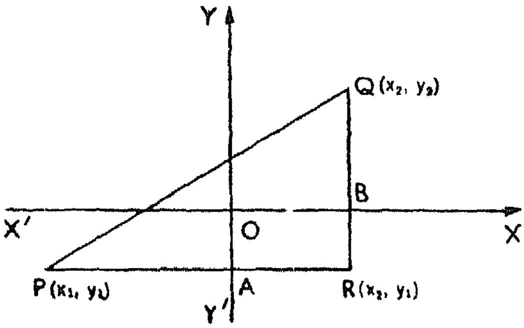
उपपत्ति : माना, आकृति 7.3 में दिखाये गये कोई दो बिन्दु P (x_1, y_1) तथा Q (x_2, y_2) हैं। P से होती हुयी एक रेखा x-अक्ष के समान्तर तथा Q से होती हुयी एक रेखा y-अक्ष के समान्तर खीचो। माना, उनका प्रतिच्छेद बिन्दु R है। R के निर्देशाक, स्पष्टतया (x_2, y_1) हैं। समकोण △PRQ में पैथागोरियन प्रमेय के प्रयोग से हम देखते हैं कि,

$$(PQ)^2=(PR)^2+(RQ)^2 \quad \text{या} \quad PQ=\sqrt{(PR)^2+(RQ)^2}$$

अब, $PR = PA + AR = -x_1 + x_2$

तथा $RQ = RB + BQ = -y_1 + y_2$

अत: $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



आकृति 7.3

करणी से कोई भी चिन्ह सम्बन्ध नहीं किया गया है क्योंकि, हमारा ध्येय दूरी का संख्यात्मक मान ज्ञात करना है, उसकी दिशा नहीं। हम समीकरण (1) को दूरी-सूत्र (**distance formula**) कहेंगे।

यदि, उपरोक्त सूत्र में, एक बिन्दु मूल बिन्दु O (0, 0) तथा दूसरा बिन्दु Q (x_2, y_2) हो तो

$$OQ = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

इस प्रकार, किसी बिन्दु P (x, y) की मूल बिन्दु से दूरी

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ है।}$$

उदाहरण 1 : बिन्दुओं (4, 5) तथा (−3, 2) के बीच की दूरी ज्ञात करो।

हल : हम (4, 5) या (−3, 2) में से किसको P चुने, यह महत्त्व नहीं रखता क्योंकि, चयन का विकल्प केवल $(x_2 - x_1)$ तथा $(y_2 - y_1)$ के चिन्हों को प्रभावित करता है। यदि, हम (4, 5) को Q लें तो

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{[4 - (-3)]^2 + (5 - 2)^2}$$
$$= \sqrt{(4 + 3)^2 + (3)^2}$$
$$= \sqrt{(7)^2 + (3)^2}$$
$$= \sqrt{58}$$

उदाहरण 2 : सिद्ध करो कि, बिन्दु (4, 4), (3, 5) तथा (−1, −1) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष निर्धारित करते हैं।

उपपत्ति : माना, बिन्दु (4, 4), (3, 5) तथा (−1, −1) क्रमशः P, Q, तथा R बिन्दुओं को व्यक्त करते हैं। तब

$$PQ = \sqrt{(3 - 4)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{2}$$
$$QR = \sqrt{[-1 - (3)]^2 + [-1 - (5)]^2} = \sqrt{52}$$

तथा $$PR = \sqrt{[-1 - (4)]^2 + [-1 - (4)]^2} = \sqrt{50}$$

चूंकि $QR^2 = RP^2 + PQ^2$, इसलिए पैथागोरियन प्रमेय के विलोम से, हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि दिया हुआ त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज है जिसमें कोण P समकोण है।

प्रश्नावली 7.1

1. बिन्दुओं के निम्नांकित युग्मों में से, प्रत्येक युग्म के बीच की दूरी ज्ञात करो :

    (i) $(-1,-4)$, $(3, 5)$

    (ii) $(a \cos \alpha, a \sin \alpha)$, $(a \cos \beta, a \sin \beta)$

2. दूरी-सूत्र की सहायता से, सिद्ध करो कि, निम्नांकित बिन्दु-समूहों में से प्रत्येक समूह, एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु हैं :

    (i) $(6, 2)$, $(3,-1)$, $(-2, 4)$

    (ii) $(-2, 2)$, $(8,-2)$, $(-4,-3)$

3. दिखाओ कि, प्रत्येक त्रिभुज, जिनके शीर्ष बिन्दु निम्नांकित हैं, समद्विबाहु त्रिभुज हैं :

    (i) $(8, 2)$, $(5,-3)$, $(0, 0)$

    (ii) $(0, 6)$, $(-5, 3)$, $(3, 1)$

4. यदि, P, Q, R, क्रमशः $(6,-1)$, $(1, 3)$ तथा $(x, 8)$ हों तो x का मान बताओ जब कि, PQ=QR

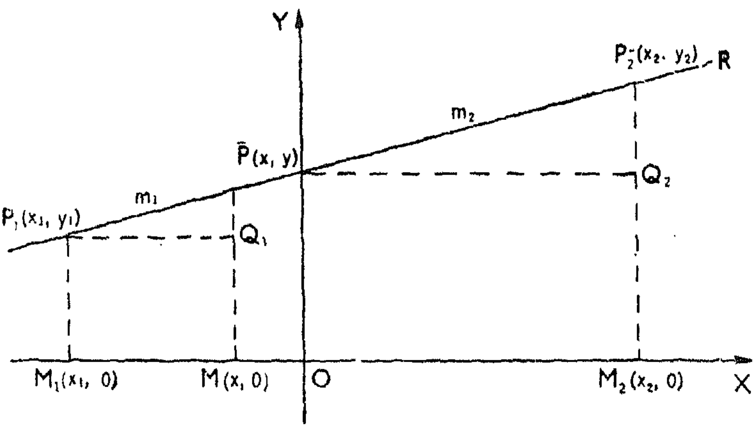
5. x-अक्ष का कौन सा बिन्दु, $(7, 6)$ तथा $(-3, 4)$ से समदूरस्थ है ?

6. यदि (x, y), $(6, -1)$ तथा $(2, 3)$ से समदूरस्थ है तो x तथा y के बीच सम्बन्ध स्थापित करो।

7.4 रेखाखण्ड का विभाजन-बिन्दु

प्रमेय : *7.4.1* माना, $P_1(x_1, y_1)$ तथा $P_2(x_2, y_2)$ को मिलाने वाली रेखा P_1P_2 है और $P(x, y)$, रेखा P_1P_2 पर P_1 तथा P_2 के बीच एक ऐसा बिन्दु है कि, $\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{m_1}{m_2}$ तब

$$x=\frac{m_2x_1+m_1x_2}{m_1+m_2}, \quad y=\frac{m_2y_1+m_1y_2}{m_1+m_2}$$



आकृति 7.4

उपपत्ति : आकृति 7.4 में दिखाये गये भांति, P_1M_1 PM, तथा P_2M_2 रेखाओं को y-अक्ष के समांतर खींचो ताकि वे x-अक्ष के M_1, तथा M_2 पर मिलें। देखते हैं कि,

$OM_1 = x_1 \quad , \quad M_1P_1 = y_1$

$OM = x \quad , \quad PM = y$

$OM_2 = x_2 \quad , \quad P_2M_2 = y_2$

P_1Q_1 तथा PQ रेखायें OX के समान्तर इस प्रकार खींचो कि वे MP तथा M_2P_2 से Q_1, तथा Q पर मिलें। तब,

$$P_1Q_1 = M_1M = OM - OM_1 = x - x_1$$
$$PQ = MM_2 = MO + OM_2 = x_2 - x$$
$$Q_1P = MP - MQ_1 = y - y_1$$
$$QP_2 = M_2P_2 - M_2Q = y_2 - y.$$

समरूप त्रिभुजों P_1Q_1P तथा PQ P_2 मे, हम देखते हैं कि,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{P_1Q_2}{PQ} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

इसलिये, $m_1 (x_2 - x) = m_2 (x - x_1)$ इससे हमें,

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2} \text{ प्राप्त होता है।}$$

इसी तरह, $$y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

ध्यान रखें कि, हमने यहाँ पर उस स्थिति पर विचार किया है जब P, P_1 तथा P_2 के बीच अवस्थित होता है अर्थात्
P, P_1P_2 का दिये हुए अनुपात में आन्तरिक विभाजन करे।

अब हमें उस स्थिति पर विचार करना है जब P, P_1, तथा P_2 के बीच अवस्थित नहीं होता। यदि, बिन्दु P, रेखा P_1P_2 का उसी अनुपात में वाह्य विभाजन करें अर्थात $\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{m_1}{m_2}$ तो उसके निर्देशांक निम्नांकित होंगे :

$$x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \quad \text{तथा } y = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$$

[पाठकगण, उपरोक्त विधि से अग्रसर होकर x तथा y के उपरोक्त व्यंजक प्राप्त करें।]

उपरोक्त प्रमेय की एक विशिष्ट दशा में, P_1P_2 के मध्य बिन्दु के निर्देशांक निम्नांकित होंगे :

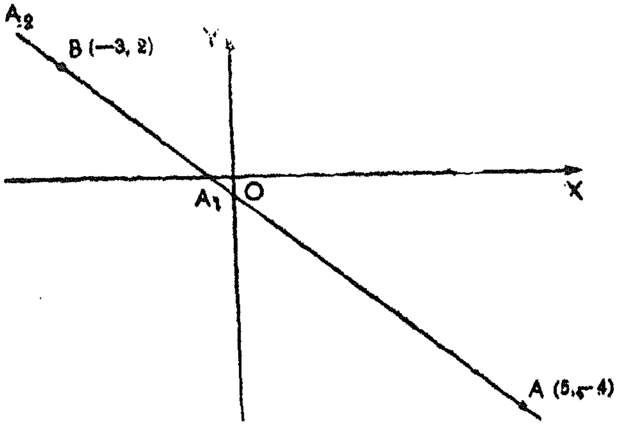
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{तथा} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (\text{क्योंकि, } m_1 = m_2)$$

उदाहरण 1 : A (5, −4) तथा B (−3, 2) से गुजरने वाली रेखा पर एक बिन्दु रेखा ज्ञात करो, जो A से B के दुगुनी दूरी पर है।

हल : स्पष्टतया, ऐसे दो बिन्दु A_1, तथा A_2 हैं जो दी हुयी शर्तों को संतुष्ट करते हैं (आकृति 7.5 देखें), A_1, के निर्देशांक ज्ञात करने के लिए, (AB का आन्तरिक विभाजन बिन्दु) हम A को P_1 B को P_2 तथा $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ ले सकते हैं। प्रमेय 7.4.1 की सहायता से हम देख सकते हैं कि,

$$x = \frac{1(5) + 2(-3)}{2+1} = \frac{5-6}{3} = -\frac{1}{3}$$

तथा $$y=\frac{1(-24)+(2)}{2+1}=\frac{0}{3}=0.$$



आकृति 7.5

इस प्रकार, A_1, के निर्देशांक $(-\frac{1}{3}, 0)$ हैं।

A_2 (AB का वाह्य विभाजन बिन्दु है) के निर्देशांक (x, y) ज्ञात करने के लिए, दिए हुए अनुपात को ऋणात्मक लेना पड़ता है। हम P_1 तथा P_2 को ठीक वैसे ही चुनते हैं परन्तु इस दशा में, $m_1=-2$ तथा $m_2=1$ लेते हैं।

तब $$x=\frac{1(5)+(-2(-3)}{-2+1}=-11$$

तथा $$y=\frac{1(-4)+(-2)(2)}{-2+1}=8$$

अतः A_2 के निर्देशांक $(-11, 8)$ हैं। छात्र आसानी से सत्यापित कर सकते हैं कि, चयन $m_1=2$, $m_2=-1$ या $m_1=-6$, $m_2=3$ भी वही परिणाम प्रदान करते हैं। मुख्य वास्तविकता, जो उल्लेखनीय है, वह यह है कि

$$\frac{m_1}{m_2}=-2.$$

यदि, प्रमेय 7.4.1 में, अनुपात $\frac{m_1}{m_2}$ एक ऋणात्मक संख्या हो तो विभाजन बिन्दु सर्वदा वाह्य विभाजन बिन्दु होगा।

उदाहरण 2 : वह बिन्दु ज्ञात करो, जो $(4, -6)$ तथा $(12, 15)$ सिरों वाले रेखाखण्ड को समद्विभाजित करता है।

हल : यदि, मध्य बिन्दु के निर्देशांक (x, y) हों तो प्रमेय 7.4.1 की विशिष्ट दशा की सहायता से,

$$x=\frac{4+12}{2}=8$$

$$y=\frac{-6+15}{2}=\frac{9}{2}$$

इस प्रकार, अभीष्ट बिन्दु $(8, \frac{9}{2})$ है।

प्रश्नावली 7.2

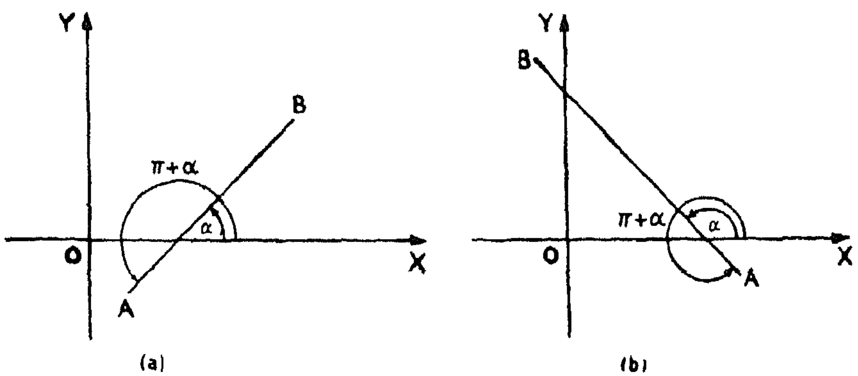
1. प्रत्येक रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु ज्ञात करो, जिनके सिरों के निर्देशांक, प्रश्नावली 7.1 के अभ्यास 1 (i) तथा (ii) में बिन्दु युग्मों से व्यक्त किए गए हैं।
2. एक वृत्त के व्यास का एक सिरा $(2, 3)$ पर तथा उसका केन्द्र $(-2, 5)$ पर है। इस व्यास के दूसरे सिरे के निर्देशांक क्या हैं ?
3. दिखाओ कि, बिन्दु $(0, 3)$, $(6, 0)$, $(4, 1)$, एक रेखा पर अवस्थित हैं।
4. यदि, बिन्दु $(3, -2)$, $(x, 2)$ तथा $(8, 8)$ एक रेखा पर अवस्थित हों तो x का मान बताओ।

   प्रश्न 5 तथा 6 में, उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करो, जो P से Q तक के खण्ड को दिए हुए अनुपात में विभक्त करता है।
5. $P(5, -2)$, $Q(9, 6)$; अनुपात 3 से 1
6. $P(-7, 2)$, $Q(-1, -1)$; अनुपात 4 से 1
7. एक चतुर्भुज के शीर्ष, $(1, 4)$, $(-2, 1)$, $(0, -1)$ तथा $(3, 2)$ पर हैं। दिखाओ कि उसके विकर्ण एक दूसरे का समद्विभाजन करते हैं।
   [**संकेत** : दिखाओ कि, दोनों विकर्णों के मध्य बिन्दु एक ही हैं]
8. उस त्रिभुज की माध्यिकाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात करो, जिसके शीर्ष $(-1, 0)$ $(5, -2)$ तथा $(8, 2)$ हैं।
9. यदि, किसी त्रिभुज के दो शीर्ष $(-1, 4)$ तथा $(5, 2)$ पर हों और माध्यिकायें $(0, -3)$ पर मिलती हों तो उस त्रिभुज का तीसरा शीर्ष ज्ञात करो।

7.5 रेखा की प्रवणता (Slope of a line)

निर्देशांक समतल में, कोई रेखा या तो x-अक्ष को प्रतिच्छेद करती है या उसके समान्तर होती है।

परिभाषा 7.5.1 : एक रेखा का **आनति कोण (angle of inclination)** या साधारणतया **आनति, (inclination)** कोण का वह माप है जो वामावर्त दिशा में रेखा और x-अक्ष के बीच होता है। आकृति (7.6 (a) तथा 7.6 (b) में,-आनति को α से दर्शाया गया है।



आकृति 7.6

यदि रेखा x-अक्ष का प्रतिच्छेद नहीं करती अर्थात् यदि रेखा x-अक्ष के समान्तर हो या यदि यह x-अक्ष के संपाती हो तो रेखा की आनति शून्य या $180°$, रेखा की दिशा के अनुसार होती है।

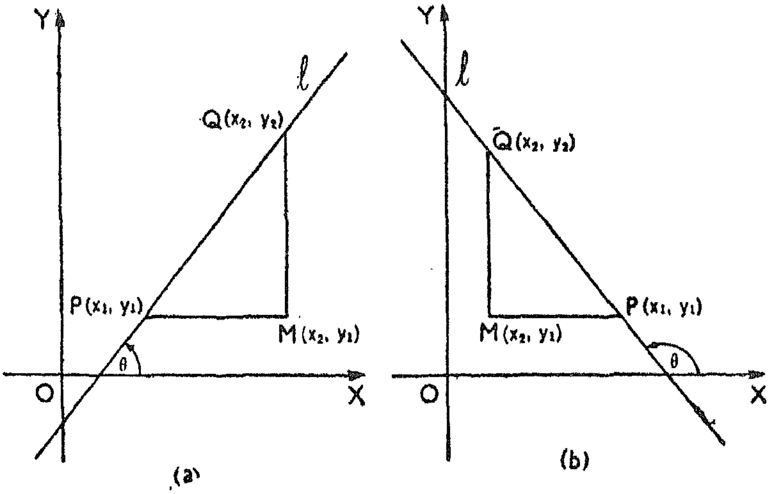
ध्यान रखें कि, प्रवणता (slope), रेखाखण्ड की दिशा से स्वतंत्र होती है अर्थात् प्रवणता AB= $\tan \alpha = \tan (180° + \alpha)$ = प्रवणता BA.

परिभाषा 7·5·2 : एक रेखा की प्रवणता m, जिसकी आनति α, $90°$ या $270°$ के न बराबर हो, तो $\tan \alpha$ से परिभाषित करते हैं। $90°$ या $270°$ आनति वाली रेखा की प्रवणता परिभाषित नहीं है।

उदाहरण 1 : यदि, एक रेखा की आनति $45°$ हो तो उसकी प्रवणता m, $m = \tan 45° = 1$ से व्यक्त होती है।

यदि, रेखा पर के दो बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात हों तो हम प्रवणता को बिन्दुओं के निर्देशांकों के पदों में ज्ञात कर सकते है।

माना l एक सरल रेखा है जो y-अक्ष के समान्तर नहीं हैं। माना रेखा l पर, दो सुव्यक्त बिन्दु (x_1, y_1) तथा Q (x_2, y_2) है (आकृति 7·7 देखें)। माना l की आनति θ है।



आकृति 7·7

P से गुजरने वाली क्षैतिज रेखा तथा Q से गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर रेखा के प्रतिच्छेद बिन्दु को M से प्रदर्शित करो। अतः इसके निर्देशांक वहीं होंगे जो आकृति में दिखाए गए हैं। तब आकृति 7·7 (a) में, कोण MPQ, θ के बराबर होगा।

इस प्रकार

$$\tan \theta = \tan (\text{MPQ}) = \frac{\text{MQ}}{\text{PM}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

आकृति 7·7 (b) में, रेखा की आनति अधिक कोण θ है और चूंकि θ तथा $\angle$MPQ एक दूसरे के सम्पूरक हैं, इसलिए,

$$\tan \theta = \tan (\text{MPQ}) = \frac{-\text{MQ}}{\text{MP}} = \frac{-(y_2 - y_1)}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

परिणामस्वरूप, हम देखते हैं कि, P (x_1, y_1) तथा Q (x_2, y_2) से गुजरने वाली रेखा की प्रवणता m निम्न प्रकार दी जाती है :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-y_1},$$

इस प्रकार, हम निम्नांकित प्रमेय सिद्ध किया है :

प्रमेय *7·5·1* : यदि P (x_1, y_1) तथा Q (x_2, y_2) रेखा l जो y-अक्ष के समान्तर नहीं है, पर दो बिन्दु हों तो l की प्रवणता जो m से प्रदर्शित होती है, निम्न प्रकार दी जाती है :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \quad x_1\neq x_2$$

यदि, $x_2=x_1$ तो m परिभाषित नहीं है । उस दशा में रेखा y-अक्ष के समान्तर होती है ।

ध्यान रखें कि, प्रत्येक वास्तविक संख्या m एक रेखा की प्रवणता हो सकती है क्योंकि, एक ऐसा कोण α ज्ञात किया जा सकता है कि $\tan \alpha=m$ तथा $(0, 0)$ और $(1, m)$ को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता m है ।

उदाहरण 1. माना बिन्दुओं P (2, 3) तथा Q (4, 9) से निर्धारित होने वाली रेखा l है । तब l की प्रवणता m निम्न प्रकार दी जाती है :

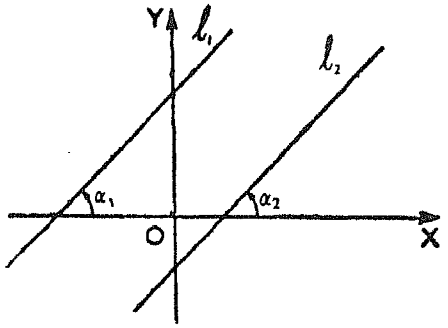
$$m=\frac{9-3}{4-2}=3$$

उदाहरण 2. बिन्दुओं P (4, 6) तथा Q (2, 12) से निर्धारित होने वाली रेखा की प्रवणता m निम्न प्रकार से व्यक्त होती है :

$$m=\frac{12-6}{2-4}=-3$$

7.6 समान्तर तथा लंब रेखाएँ (Parallel and Perpendicular Lines)

माना, l_1 तथा l_2 दो रेखाएँ हैं जिनमें से कोई भी y-अक्ष के समान्तर नहीं है । यदि, रेखाएँ चित्र 7·8 में दिखाये गए भाँति, समान्तर हैं, तो उनके आनति कोण α_1 तथा α_2 बराबर होंगे और परिणामस्वरूप, $\tan \alpha_1=\tan \alpha_2$ अर्थात् $m_1=m_2$.



आकृति 7.8

विलोमत : यदि रेखाओं की प्रवणता समान हो अर्थात् $\tan\alpha_1=\tan\alpha_2$ तो $\alpha_1=\alpha_2$ या $\alpha_1=180°+\alpha_2$ । दोनों दशाओं में, रेखाएँ समान्तर हैं । इस प्रकार, हम निम्नांकित प्रमेय सिद्ध किए हैं :

प्रमेय *7·6·1* : दो रेखाएँ (y-अक्ष के समान्तर नहीं) समान्तर होती हैं यदि और केवल यदि उनकी प्रवणता बराबर हो । यदि, रेखा y-अक्ष के समान्तर हो तो उसकी प्रवणता परिभाषित नहीं होती है ।

यदि l_1, तथा l_2 रेखाएँ लंबवत् हो तो α_1 तथा α_2 में $90°$ का अन्तर होता है (क्यों?) आकृति 7·9 में, $\alpha_2=\alpha_1\pm 90°$, अत: $\tan\alpha_2=\tan(\alpha_1\pm 90°)$

यदि, हम धनात्मक चिन्ह लें तो हमें

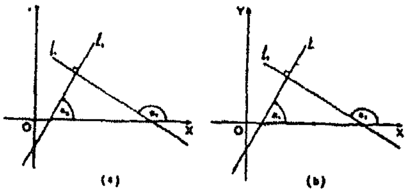
$\tan\alpha_2=-\cot\alpha_1=-\frac{1}{\tan\alpha_1}$ प्राप्त होता है ।

यदि, हम ऋणात्मक चिन्ह लें तो

$$\tan\alpha_2=\tan(\alpha_1-90)=-\tan(90-\alpha_1)=-\cot\alpha_1$$

चूंकि $\tan\alpha_2=m_2$ तथा $\tan\alpha_1=m_1$

इसलिए,



आकृति 7·9

$$m_2=-\frac{1}{m_1} \qquad \text{या } m_1 m_2=-1$$

विलोमत : यदि, $m_2=-\frac{1}{m_1}$

तब $\tan\alpha_2=-\cot\alpha_1$ तथा $\alpha_2=\alpha_1+90°$ ।

परिणामस्वरूप, रेखाएँ लंबवत हैं । इस प्रकार, हमने निम्नांकित प्रमेय सिद्ध किया है .

प्रमेय *7·6·2* : दो रेखाएँ (y-अक्ष के समान्तर नहीं) लंबवत् हैं यदि और केवल यदि उनकी प्रवणताएँ m_1, m_2 समीकरण $m_1 m_2=-1$ को सन्तुष्ट करे । यदि, उनमें से एक की प्रवणता अपरिभाषित है ता वह y-अक्ष के समान्तर होती है । और इसलिए लम्ब रेखा की प्रवणता शून्य होती है तथा x-अक्ष के समान्तर होती है ।

उदाहरण 1 : दिखाओ कि, (0, 0) तथा (2, 3) से जाने वाली रेखा, (2, −2) तथा (6, 4) जाने वाली रेखा के समान्तर है ।

उपपत्ति : पहली रेखा की प्रवणता,

$$m_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-0}{2-0}=\frac{3}{2}.$$

तथा दूसरी रेखा की प्रवणता

$$m_2=\frac{4-(-2)}{6-2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \text{ है ।}$$

चूंकि, प्रवणताएँ बराबर हैं, इसलिए रेखाएँ समान्तर हैं।

उदाहरण 2 : सिद्ध करो कि, $(-2, 6)$ तथा $(4, 8)$ से जाने वाली रेखा, $(8, 12)$ तथा $(4, 24)$ से जाने वाली रेखा पर लम्ब है।

उपपत्ति : यहाँ पर, $$m_1 = \frac{8-6}{4-(-2)} = \frac{1}{3}$$

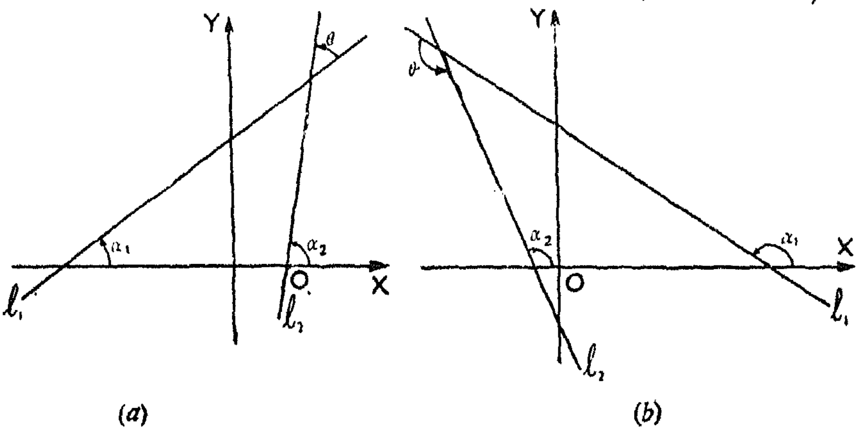
तथा, $$m_2 = \frac{24-12}{4-8} = -3$$

चूंकि $m_1 m_2 = -1$ इसलिये रेखाएँ परस्पर लम्बवत् हैं।

7·7 प्रतिच्छेदी रेखाओं से निर्मित कोण (Angles Formed by Intersecting Lines)

हम, कोई दो अ-लंबवत् रेखाओं l_1 तथा l_2 पर विचार करेंगे, जिनमें से कोई भी y-अक्ष के समान्तर नहीं है। हम l_1 तथा l_2 रेखाओं के बीच के कोण के लिए सूत्र की स्थापना करेंगे और इस कोण का मान प्रवणताओं के पदों में ज्ञात करेंगे।

l_1 तथा l_2 रेखाओं के बीच का कोण या तो न्यून होगा या अधिक (आकृति 7·10 देखें)।



आकृति 7·10

चूंकि α_2 उस त्रिभुज का बाह्य कोण है, जिसके विपरीत आन्तरिक कोण α_1 तथा θ हैं, इसलिए आकृति 7.10 (a) से, हम देखते हैं कि,

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \theta$$

अतः $$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

तथा $$\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2 \tan\alpha_1}$$

इसलिए, $$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

जहाँ पर $m_1 = \tan\alpha_1$, तथा $m_2 = \tan\alpha_2$

आकृति 7.10 (b) से, हम देखते हैं कि, $\alpha_1 = \alpha_2 + (\pi - \theta)$

क्योंकि $(\pi - \theta)$ तथा α_2 उस त्रिभुज के आन्तरिक कोण हैं, जिसका विपरीत बाह्य कोण α_1। इसलिए,

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1 + \pi$$

$$\tan\theta = \tan[\pi + (\alpha_2 - \alpha_1)] = \tan(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$= \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_2 \tan \alpha_1}$$

इस प्रकार, $\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

इस प्रकार से, हमने निम्नांकित प्रमेय सिद्ध किया है।

प्रमेय 7.7.1 : l_1 तथा l_2 रेखाओं के बीच के धनात्मक कोण θ, जहां पर उनकी प्रवणतायें क्रमशः $m_1 = \tan \alpha_1$ तथा $m_2 = \tan \alpha_2$ है, को निम्न समीकरण से व्यक्त करते हैं :

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \qquad (1)$$

हम देखते हैं कि

I. यदि, दो रेखायें एक दूसरे पर लंब हों तो

$m_1 = -\frac{1}{m_2}$ अर्थात् $1 + m_1 m_2 = 0$। इस प्रकार इस दशा में

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

परिभाषित नहीं हैं।

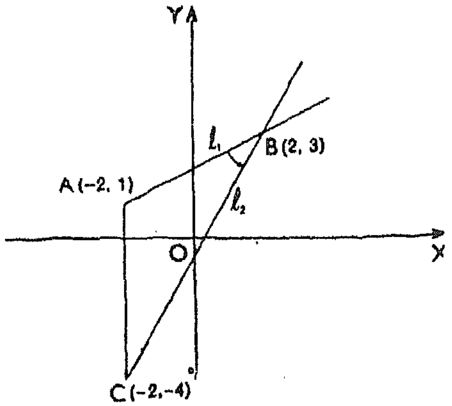
II. यदि रेखायें समान्तर हैं तो $m_1 = m_2$

ध्यान रहे कि, संख्यात्मक उदाहरणों में $\tan \theta$ का मान कभी-कभी ऋणात्मक आता है। इसका सिर्फ अर्थ यह है कि, न्यून प्रतिच्छेदी कोण प्राप्त करने की जगह इसके सम्पूरक कोण को प्राप्त किया गया है, जो उन्हीं रेखाओं का ही प्रतिच्छेदी कोण है।

व्यवहारतः इस परिणाम को सर्वथा धन चिन्ह के साथ ही लिया जाता है। अगर ऋण चिन्ह आ रहा हो तो उसको छोड़ कर धन चिन्ह ही लिखा जाता है। इस प्रकार, रेखाओं के बीच न्यूनकोण प्राप्त होता है।

उदाहरण 1 : यदि, एक त्रिभुज के शीर्ष A (−2, 1), B (2, 3) तथा C (−2, −4) हों तो कोण B ज्ञात करो।

हल : माना, BA तथा BC क्रमशः l_1 तथा l_2 रेखायें हैं। तब सूत्र (1) अभीष्ट कोण देगा। (आकृति 7.11 देखें)



आकृति 7.11

तब, $$m_1 = \frac{1-3}{-2-2} = \frac{1}{2}.$$

$$m_2 = \frac{-4-3}{-2-2} = \frac{7}{4}.$$

और $$\tan\,(ABC) = \frac{\frac{7}{4}-\frac{1}{2}}{1+\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{15}{8}} = \frac{2}{3} \cong 0.667.$$

इस प्रकार, $\angle B \cong 30°\ 42$!

उदाहरण 2 : यदि, $m_2 = \frac{1}{2}$ तथा $\theta = \frac{\pi}{4}$ हो तो m_1 का मान ज्ञात करो।

हल : सूत्र $$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1+m_1.m_2}$$ से हमें

$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\frac{1}{2}-m_1}{1+\frac{m_1}{2}}$$

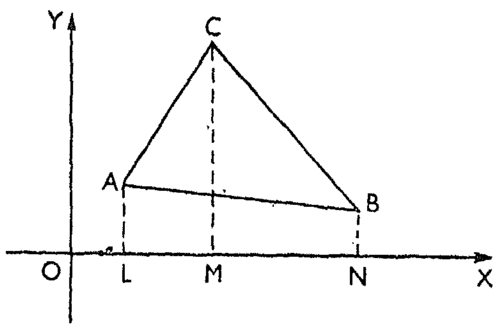
प्राप्त होता है। या, $$1 = \frac{1-2m_1}{2+m_1}$$

या, $$2+m_1 = 1-2m_1$$

इसलिये, $$m_1 = -\frac{1}{3}.$$

7.8 त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of a Triangle)

अब, हम त्रिभुज के क्षेत्रफल के लिए, उसके शीर्षों के निर्देशांकों के पदों में, एक सूत्र की स्थापना करेंगे। माना, ABC एक त्रिभुज है जिसके शीर्ष $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ हैं। जैसा कि आकृति 7.12 में दर्शाया गया है।



आकृति 7·12

AL, CM तथा BN कोटियों को खींचो।

$\triangle$ABC का क्षेत्रफल = समलंब ALMC का क्षेत्रफल + समलंब CMNB का क्षेत्रफल — समतल का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} (AL+CM)\, LM + \frac{1}{2} (CM+BN).\; MN - \frac{1}{2} (AL+BN)\, LN$$

$$= \frac{1}{2} (y_1+y_3)(x_3-x_1) + \frac{1}{2} (y_3+y_2)(x_2-x_3) - \frac{1}{2} (y_1+y_2)(x_2-x_1)$$

$$= \frac{1}{2} [(y_1+y_3)(x_3-x_1) + (y_3+y_2)(x_2-x_3) - (y_1+y_2)(x_2-x_1)]$$

$$= \frac{1}{2} [x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)] \text{ ।}$$

इसको सारणिक के रूप में व्यक्त करने पर,

$$\triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल } = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

उपरोक्त वर्णन से हम निम्नांकित निष्कर्ष पर पहुंचते हैं :

परिभाषा 7.8.1. तीन बिन्दु, (x_1, y_1), (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3) तभी संरेख होते हैं जबकि,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

उदाहरण 1 : यदि, एक त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु (3, 4), (—3, 0) तथा (7,—4) हो तो उसके क्षेत्रफल का कांतिमान ज्ञात करो।

हल : यदि, शीर्षों को बिन्दुओं के दिये गये क्रम में A, B, C से सम्बन्धित किया जाय तो इस प्रकार बने त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 7 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} [12+24+28] = 32$$

अतः क्षेत्रफल 32 वर्ग इकाई है।

उदाहरण 2 : दिखाओ कि तीनों बिन्दु (—1,—1), (2, 3) तथा (8, 11) एक ही रेखा पर अवस्थित हैं।

उपपत्ति : यहां पर,

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 11 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3+11+2+22-8-24 = 0$$

अतः परिभाषा 7.8.1 से, बिन्दु एक रेखा पर अवस्थित है।

प्रश्नावली 7.3

1. एक रेखा के बारे में क्या कहा जा सकता है कि यदि उसकी प्रवणता
   (a) धनात्मक ? (b) शून्य ? (c) ऋणात्मक ? हो
2. निम्नांकित आनति वाली रेखा की प्रवणता ज्ञात करो :
   (a) 0° (b) 45° (c) 90° (d) 150°
3. निम्नांकित बिन्दु-युग्मों से गुजरने वाली रेखा की प्रवणता ज्ञात करो :
   (a) (1, 2), (4, 2) (b) (0, —4), (—6, 2)
   (c) (4, —6), (—2, —5)।
4. दिखाओ कि, (2, —3) तथा (—5, 1) को मिलाने वाली रेखा—
   (a) (7, —1) तथा (0, 3) को मिलाने वाली रेखा के समांतर है।
   (b) (4, 5) तथा (0, —2) को मिलाने वाली रेखा पर लम्ब है।
5. बताओ कि, निम्नांकित प्रश्नों में से प्रत्येक प्रश्न में दी हुई रेखाएँ समान्तर हैं, लम्बवत् हैं या दोनों में से कुछ भी नहीं हैं :
   (a) (5, 6) तथा (2, 3) से गुजरने वाली; (9, —2) तथा (6, —5) से गुजरने वाली,
   (b) (8, 2) तथा (—5, 3) से गुजरने वाली, (16, 6) तथा (3, 15) से गुजरने वाली,
   (c) (2, —5) तथा (—2, 5) से गुजरने वाली, (6, 3) तथा (1, 1) से गुजरने वाली,
   (d) (9, 5) तथा (—1, 1) से गुजरने वाली, (8, —3) तथा (3, —5) से गुजरने वाली।
6. यदि, (2, 5) तथा (x, 3) से गुजरने वाली रेखा की प्रवणता 2 हो तो x का मान बताओ।
7. यदि, (3, y) तथा (2, 7) से गुजरने वाली रेखा, (—1, 4) तथा (0, 6) से गुजरने वाली रेखा के समान्तर हो तो y का मान ज्ञात करो।
8. बिना पैथागोरीयन प्रमेय की सहायता से, दिखाओ कि, (4, 4), (3, 5) तथा (—1, —1) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।
9. एक चतुर्भुज के शीर्ष, (—4, 2), (2, 6), (8, 5) तथा (9, —7) बिन्दुओं पर हैं। दिखाओ कि, इस चतुर्भुज की भुजाओं के मध्यबिन्दु, समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष बिन्दु हैं।
10. (a) से (d) तक के प्रत्येक प्रश्न में, त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो, जिनके शीर्ष बिन्दु निम्नांकित हैं :
    (a) (0 0), (1, 0), (1, 1) (b) (—2, 1), (2, —3), (4, 4)
    (c) (3, 8), (—4, 2), (5, —1) (d) (2, 7), (3, —1), (—5, 6)

11. दिखाओ कि, निम्नांकित में से प्रत्येक बिन्दुओं का त्रिक संरेख है :

(a) (2, 4), (0, 1), (4, 7)

(b) (−2, 5), (2, −3), (0, 1)

(c) (−5, 7), (−4, 5), (1, −5).

7.9 ज्यामितीय प्रमेयों की विश्लेषिक उपपत्ति (Analytic Proofs of Geometric Theorems)

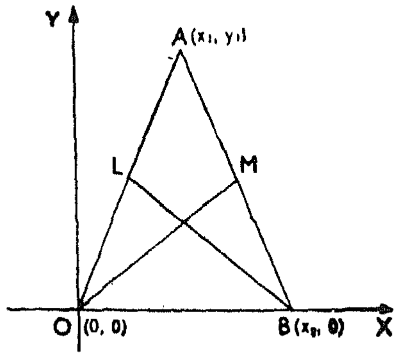
इस अध्याय में दी हुयी संकल्पनाओं एवं प्राप्त सूत्रों के प्रयोग से, समतल ज्यामिति के बहुत से प्रमेय सुगमतापूर्वक सिद्ध किये जा सकते हैं। किसी उपपत्ति में, यदि निर्देशांक पद्धति का निदर्शन होता है तो उस उपपत्ति को विश्लेषिक उपपत्ति कहते है। निम्नांकित उदाहरण इसको स्पष्ट करने में सक्षम हैं।

उदाहरण 1 : यदि, किसी त्रिभुज की दो माध्यिकाएँ बराबर हैं तो सिद्ध करो कि त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज है।

उपपत्ति : निश्चय ही हमें व्यापक त्रिभुज के लिए उपपत्ति देनी हैं, किसी विशिष्ट त्रिभुज के लिए नहीं। पुनः यदि निर्देशांक अक्षों को बुद्धिमानी से चुना जाय तो यह कार्य और भी आसान बनाया जा सकेगा। हम, निर्देशांक अक्षों का चयन इस प्रकार कर सकते हैं कि मूल बिन्दु, त्रिभुज OAB के एक शीर्ष O पर हो तथा एक निर्देशांक अक्ष, माना x-अक्ष, आकृति 7.13 में दिखाये गये भाँति, एक भुजा OB पर हो। माना, त्रिभुज के शीर्ष, O (0, 0), A (x_1, y_1) तथा B $(x_2, 0)$ पर हैं। कोई भी त्रिभुज इस प्रकार निरूपित किया जा सकता है।

माना, OA तथा BA के मध्य बिन्दु क्रमशः L तथा M हैं। उनके निर्देशांक,

$$L:\left(\frac{x_1}{2},\ \frac{y_1}{2}\right),\quad M:\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1}{2}\right) \qquad \text{(प्रमेय 7.4.1से)}$$



आकृति 7.13

हैं। इसलिए, दूरी सूत्र की सहायता से, माध्यिका OM की लम्बाई निम्नांकित है :

$$OM=\sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}-0\right)^2+\left(\frac{y_1}{2}-0\right)^2}$$

तथा माध्यिका LB की लम्बाई,

$$LB=\sqrt{\left(\frac{x_1}{2}-x_2\right)^2+\left(\frac{y_1}{2}-0\right)^2}$$

प्रश्नानुसार, माध्यिकाएँ बराबर हैं, इसलिये,

$$\sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{x_1}{2}-x_2\right)^2+\left(\frac{y_1}{2}\right)^2}$$

या, $$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{2}\right)^2=\left(\frac{x_1}{2}-x_2\right)^2+\left(\frac{y_1}{2}\right)^2$$

या, $$\frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4}=\frac{x_1^2}{4}-x_1x_2+x_2^2.$$

या, $$2x_1x_2+x_2^2=-4x_1x_2+4x_2^2$$

या, $$6x_1x_2=3x_2^2.$$

चूंकि $x_2\neq 0$, इसलिए दोनों पक्षों में $3x_2$ से भाग देने पर,

$$2x_1=x_2$$

अब, यदि हम B के निर्देशांक $(2x_1, 0)$ लें तो,

$OA=\sqrt{(0-x_1)^2+(0-y_1)^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

$BA=\sqrt{(2x_1-x_1)^2+(0-y_1)^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}.$

अर्थात् OA = BA इस प्रकार, त्रिभुज, समद्विबाहु त्रिभुज है।

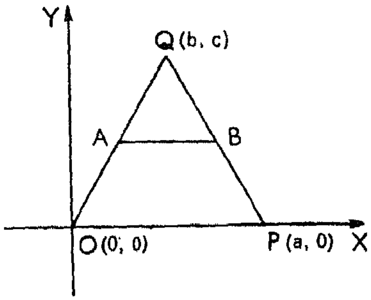
उदाहरण 2 : सिद्ध करो कि, किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा, तीसरी भुजा के समान्तर और भुजा की लम्बाई की आधी होती है।

उपपत्ति : त्रिभुज OPQ पर विचार करो, जिसके शीर्ष O (0, 0), P $(a, 0)$ तथा Q (b, c) हैं (आकृति 7.14 देखें)।

OQ का मध्य बिन्दु A, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$ है। PQ का मध्य बिन्दु B, $\frac{a+b}{2}$, $\frac{c}{2}$ है। AB की प्रवणता m_1, निम्न प्रकार से दी जा सकती है :

$$m_1=\frac{\frac{c}{2}-\frac{c}{2}}{\frac{a+b}{2}-\frac{b}{2}}=0.$$

OP की प्रवणता m_2 निम्न प्रकार से दी जा सकती है :



आकृति 7.14

$$m_2 = \frac{0-0}{a-0} = 0.$$

इस प्रकार, $m_1 = m_2$ अतः दोनों भुजाओं के मध्यबिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा, तीसरी भुजा के समान्तर है।

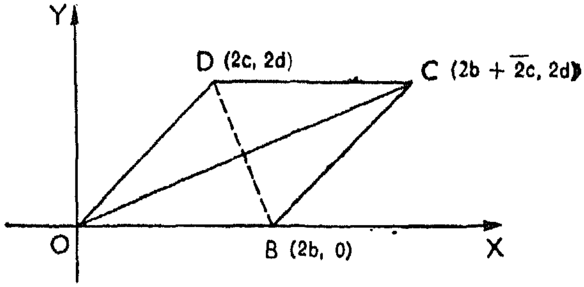
पुनः $$AB = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - \frac{c}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}$$

तथा $$OP = \sqrt{(0-a)^2 + (0-0)^2} = a.$$

अतः दोनों मध्य बिन्दुओं A तथा B को मिलाने वाली रेखा, आधार की आधी है।

उदाहरण 3 : सिद्ध करो कि, समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण, एक दूसरे का समद्विभाग करते हैं।

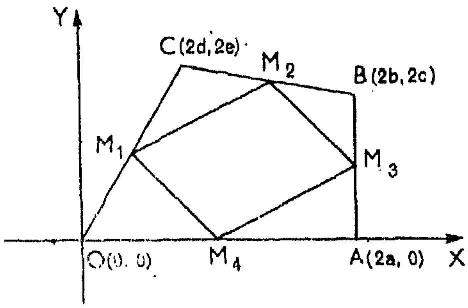
उपपत्ति : यह सिद्ध करने के लिए कि, विकर्ण एक दूसरे का समद्विभाग करते हैं। केवल यह दिखा देना आवश्यक है कि प्रत्येक विकर्ण का एक ही मध्य बिन्दु है। माना, OBCD एक समान्तर चतुर्भज है, जिसके शीर्ष, O (0, 0), B $(2b, 0)$, तथा D $(2c, 2d)$ हैं। (आकृति 7.15 देखें)। अतः चौथे शीर्ष C के निर्देशांक $(2b+2c, 2d)$ होंगे। विकर्ण OC का मध्य बिन्दु $(b+c, d)$ तथा BD का $(b+c, d)$ है। यही सिद्ध करना था।



आकृति 7.15

उदाहरण 4 : सिद्ध करो कि, चतुर्भुज की संलग्न भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्डों से समान्तर चतुर्भुज निर्मित होता है।

उपपत्ति : माना, चतुर्भुज के शीर्ष, O (0, 0), A $(2a, 0)$, B $(2b, 2c)$ तथा C $(2d, 2e)$ बिन्दुओं पर हैं (आकृति 7.16 देखें)। माना, OC, CB, BA तथा OA के मध्य बिन्दु क्रमशः M_1, M_2, M_3 तथा M_4



आकृति 7.16

हैं। यह सिद्ध करने के लिए कि. चतुर्भुज M_1, M_2, M_3, M_4 एक समान्तर चतुर्भुज है, हमें केवल यह दिखाना है कि, भुजा M_2M_3, भुजा M_1M_4 के तथा भुजा M_1M_2, भुजा M_4M_3 के समान्तर है।

M_1 के निर्देशांक, (d, e)

M_2 के निर्देशांक, $(b+d, c+e)$

M_3 के निर्देशांक, $(a+b, c)$

तथा M_4 के निर्देशांक, $(a, 0)$ हैं।

अब, हम M_1M_2, M_2M_3, M_4M_3 तथा M_4M_1 की प्रवणता ज्ञात करेंगे :

$$M_1M_2 \text{ की प्रवणता } = \frac{c+e-e}{b+d-d} = \frac{c}{b}$$

$$M_2M_3 \text{ की प्रवणता } = \frac{c-(c+e)}{a+b-(b+d)} = \frac{-e}{a-d}$$

$$M_4M_3 \text{ की प्रवणता } = \frac{0-c}{a-(a+b)} = \frac{c}{b}.$$

$$M_4M_1 \text{ की प्रवणता } = \frac{0-e}{a-d} = \frac{-e}{a-d}.$$

हम देखते हैं कि, M_1M_2 की प्रवणता $=$ M_4M_3 की प्रवणता तथा M_2M_3 की प्रवणता $=$ M_1M_4 की प्रवणता। इस प्रकार, $M_1M_2M_3M_4$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

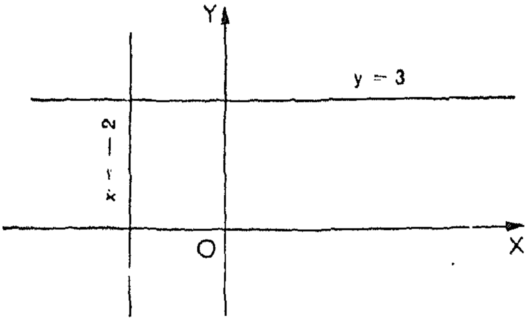
प्रश्नावली 7.4

निम्नांकित कथनों में से प्रत्येक की विश्लेषिक उपपत्ति दो :

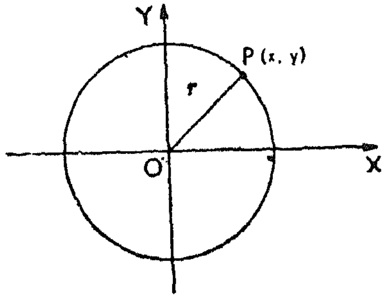
1. एक समद्विबाहु त्रिभुज की दो बराबर भुजाओं की माध्यिकायें बराबर होती हैं।
2. एक वर्ग के विकर्ण एक दूसरे पर लंब होते हैं।
3. एक समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे पर लंब होते हैं।
4. यदि, समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों तो समान्तर चतुर्भुज एक आयत होता है।
5. एक आयत के विकर्ण बराबर होते हैं।
6. यदि, आयत के विकर्ण लंबवत् हों तो, वह एक वर्ग होता है।
7. यदि, समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण लंबवत् हों तो वह आकृति समचतुर्भुज होती है।
8. किसी भी त्रिभुज में, माध्यिकाओं के वर्गों के योग का चार गुना, भुजाओं के वर्गों के योग के तिगुने के बराबर होता है।

7.10 बिन्दु-पथ तथा समीकरण (Locus and Equation)

समतल में एक ऐसी रेखालो, जो x-अक्ष के समान्तर हो तथा इसके ऊपर तीन इकाई पर अवस्थित हो। (आकृति 7.17 देखें)। इस रेखा के प्रत्येक बिन्दु (x, y) का गुण धर्म यह है कि, उसकी कोटि 3 है और प्रत्येक बिन्दु जो इस रेखा पर नहीं है, उसकी कोटि 3 के बराबर नहीं है। इस प्रकार, यहाँ उपयुक्त रेखा



आकृति 7.17



आकृति 7.18

$y=3$ से निर्धारित की जा सकती है। दी हुई रेखा, उन बिन्दुओं का बिन्दु पथ है जिनकी कोटि 3 है। इसी प्रकार, समीकरण $x=-2$, उन बिन्दुओं का बिन्दु-पथ है, जो y-अक्ष के समान्तर रेखा पर इसके दो इकाई बायीं तरफ अवस्थित हैं।

r त्रिज्या के वृत्त पर विचार करो (आकृति 7.18 देखें), जिसका केन्द्र मूल बिन्दु पर है। (वृत्त, बिन्दु (x, y) का वह बिन्दु-पथ है, जहाँ उसकी मूल बिन्दु से दूरी r के बराबर है)।

माना, परिधि पर कोई बिन्दु P (x, y) है। दूरी-सूत्र की सहायता से, P से O तक की दूरी $\sqrt{x^2+y^2}$ है। इस प्रकार, हमेशा $r=\sqrt{x^2+y^2}$ या, $r^2=x^2+y^2$ है। इस प्रकार, हमने यह दिखाया है कि, यदि एक बिन्दु r त्रिज्या के वृत्त पर अवस्थित है तो वह समीकरण $x^2+y^2=r^2$ को सन्तुष्ट करेगा। अब, यदि बिन्दु वृत्त पर न हों और उसके निर्देशांक (a, b) हों तो

$$a^2+b^2\neq r^2$$

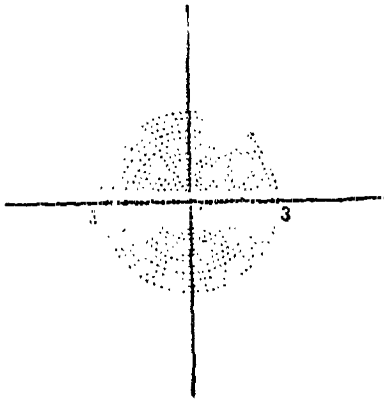
इस प्रकार, हमने दिखाया है कि, मूल बिन्दु से r इकाई पर अवस्थित बिन्दुओं का बिन्दु-पथ, समीकरण $x^2+y^2=r^2$ से व्यक्त होता है, जो r त्रिज्या तथा मूल बिन्दु केन्द्र वाले वृत्त का समीकरण है।

उपरोक्त उदाहरण के आधार पर हम निम्नांकित परिभाषा देते हैं :

परिभाषा 7.10.1 : बिन्दु-पथ (**locus**) सभी, बिन्दुओं का वह समुच्चय है जो एक ज्यामितीय प्रतिबंध को सन्तुष्ट करते हैं।

उदाहरणार्थ, यदि, वह ज्यामितीय शर्त इस प्रकार है कि, बिन्दुओं की मूल बिन्दु से दूरी 3 है, तो बिन्दु-पथ, सभी बिन्दुओं (x, y) का समुच्चय है ताकि $x^2+y^2=9$ यदि, ज्यामितीय प्रतिबन्ध इस प्रकार है कि, बिन्दुओं की मूल बिन्दु से दूरी 3 से कम हैं तो बिन्दु पथ, सभी बिन्दुओं (x, y) का समुच्चय है

कि $x^2+y^2<9$, जो स्पष्टतया एक क्षेत्र निरूपित करता है और वह वृत्त का आन्तरिक भाग है (आकृति 7.19 देखें)।



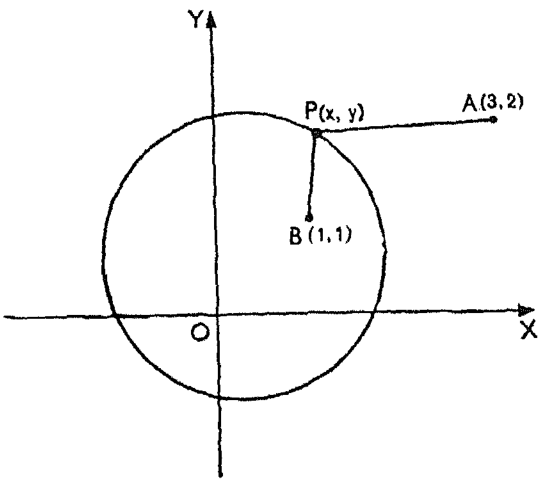
आकृति 7.19

उपरोक्त उदाहरण, इस व्यापक संकल्पना का निदर्शन करते हैं कि, यदि, एक वक्र को बिन्दु (x, y) का बिन्दु-पथ मान लिया जाय तो बिन्दु के निर्देशांक एक निश्चित समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं, जिसे **वक्र का समीकरण** कहते हैं। विलोमतः चर x तथा y के पदों में दिया हुआ समीकरण एक निश्चित वक्र को निर्धारित करता है।

इस अध्याय और बाद में भी, हम वक्र का समीकरण ज्ञात करेंगे, जिसे बिन्दु-पथ कहते हैं।

उदाहरण 1 : उन बिन्दुओं का बिन्दु-पथ का समीकरण ज्ञात करो, जो $(1, 1)$ से $(3, 2)$ की दुगुनी दूरी पर हैं।

हल : प्रतिमान बिन्दु $P(x, y)$ की सहायता से आकृति 7.20 खींचा गया है।



आकृति 7.20

हमें, $2\,|PB| = |PA|$ सिद्ध करना है। चूँकि P के सभी मानों के लिए, $|PB| \geqslant 0$ तथा $|PA| \geqslant 0$, इसलिए, $2\,|PB| = |PA|$ होगा यदि और केवल यदि

$$4\,|PB|^2 = |PA|^2$$

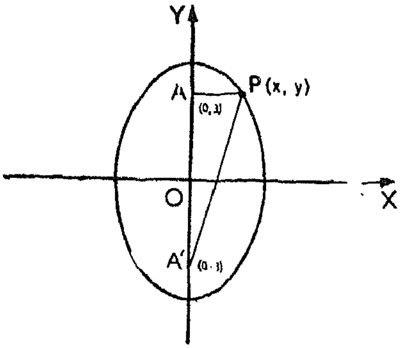
या, $4[(x-1)^2+(y-1)^2]=(x-3)^2+(y-2)^2$

या, $4x^2-8x+4+4y^2-8y+4=x^2-6x+9+y^2-4y+4.$

या, $3x^2+3y^2-2x-4y=5.$

इसलिए, अभीष्ट बिन्दु-पथ, समीकरण $3x^2+3y^2-2x-4y=5.$ से व्यक्त होता है।

उदाहरण 2 : उन बिन्दुओं का बिन्दु-पथ का समीकरण ज्ञात करो, जिनके (0, 3) तथा (0, −3) से दूरियों का योग 8 है।



आकृति 7.21

हल : माना, $P(x, y)$, बिन्दु-पथ का कोई बिन्दु है और A तथा A′ क्रमशः (0, 3) तथा (0, −3) हैं। (आकृति 7.21 देखें) यहाँ पर, $|PA| + |PA'| = 8$ है। इसकी सहायता से, हम देखते हैं कि,

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y+3)^2}=8$$

या, $x^2+(y^2-6y+9)=64-16\sqrt{x^2+(y+3)^2}+x^2+y^2+6y+9$

या, $-12y=641-6\sqrt{x^2+(y+3)^2}$

या, $12y+64=16\sqrt{x^2+(y+3)^2}$

या, $3y+16=4\sqrt{x^2+(y+3)^2}$

या, $9y^2+96y+256=16\,(x^2+y^2+6y+9)$

या, $9y^2+96y+256=16x^2+16y^2+96y+144.$

या, $112=16x^2+7y^2$

अतः $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{16}=1$

इसलिए, अभीष्ट बिन्दु-पथ $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{16}=1.$ है।

उपरोक्त वर्णन से यह स्पष्ट है कि, यदि, निर्देशांक पद्धति परिभाषित हो तो, एक विशिष्ट बिन्दु-पथ का निर्धारण करने वाले प्रतिबन्धों को एक समीकरण या समीकरणों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है जो एक बिन्दु के निर्देशांकों x तथा y को शामिल करते हैं। जब यह सम्भव होता है, जैसा कि प्रायः होता है, तो बिन्दु-पथों एवं समीकरणों के बीच एक सन्बन्ध स्थापित हो जाता है। यह सम्बन्ध, निर्देशांक ज्यामिति में दो मौलिक प्रश्नों का आधार है।

1. बिन्दु-पथ (ज्यामितीय प्रतिबन्ध) ज्ञात होने पर, संगत बीजीय सम्बन्ध (समीकरण असमिकायें) ज्ञात करना।

2. बीजीय सम्बन्ध (समीकरण असमिकायें) ज्ञात होने पर, संगत बिन्दु-पथ ज्ञात करना।

आगामी प्रतिच्छेदों में, हम इन दो प्रश्नों को बिन्दु-पथ-सरल रेखा, वृत्त, परवलय, दीर्घवृत्ति तथा अति परवलय के संदर्भ में विचार करेंगे।

प्रश्नावली 7.5

1. $(-1, -1)$ तथा $(4, 2)$ से समदूरस्थ बिन्दुओं के बिन्दु पथ का समीकरण ज्ञात करो।

2. बिन्दु $(4, 2)$ तथा x-अक्ष से समदूरस्थ सभी बिन्दुओं के बिन्दु-पथ का समीकरण ज्ञात करो।

3. यदि, खण्ड OP की प्रवणता 3 हो तो सभी बिन्दुओं $P(x, y)$ के बिन्दु-पथ का समीकरण ज्ञात करो। यहाँ पर O बिन्दु $(0, 0)$ है।

4. A तथा B क्रमशः (a, c) तथा $(\ \ a, c)$ नियत बिन्दु हैं। जब $PA = n\, PB$, n एक अचर है तो P के बिन्दु-पथ का समीकरण ज्ञात करो।

5. बिन्दु $(2, 4)$ तथा y-अक्ष से समदूरस्थ बिन्दुओं के बिन्दु पथ का समीकरण ज्ञात करो।

6. उन बिन्दुओं के बिन्दु पथ का समीकरण ज्ञात करो, जिनकी $(0, 2)$ तथा $(0, -2)$ से दूरियों का योग 6 है।

7. यदि, खण्ड OP, P तथा बिन्दु $(3, 2)$ को मिलाने वाले खण्ड के समान्तर हो तो सभी बिन्दुओं $P(x, y)$ के बिन्दु-पथ का समीकरण ज्ञात करो।

8. माना, A तथा A′ बिन्दु क्रमशः $(5, 0)$ तथा $(-5, 0)$ हैं। सभी बिन्दुओं $P(x, y)$ के बिन्दु-पथ का समीकरण ज्ञात करो, जबकि

$$|AP| - |A'P| = 6$$

9. यदि किन्हीं बिन्दुओं की $(3, 0)$ तथा $(-3, 0)$ से दूरियों का योग 9 से कम हो तो, बिन्दुओं के बिन्दु-पथ का समीकरण ज्ञात करो।

10. बिन्दुओं $P(x, y)$ के बिन्दु-पथ का समीकरण ज्ञात करो, जबकि उन बिन्दुओं की $(-1, 2)$ से दूरी 3 से अधिक है।

7.11 सरल रेखा (Straight Line)

माना, l दी हुई सरल रेखा है। इस पर, दो महत्त्वपूर्ण बिन्दु हैं वे x तथा y-अक्षों से l के दो प्रतिच्छेद बिन्दु हैं। जहाँ पर, रेखा x-अक्ष से मिलती है उसको ज्ञात करने के लिए $y=0$ रखकर x के लिए हल किया जाता है। इसी तरह, वे बिन्दु, जहाँ पर रेखा y-अक्ष से मिलती है, $x=0$ रखकर y के लिए हल करने पर प्राप्त होते हैं। यदि, ये बिन्दु $(a, 0)$ तथा $(0, b)$ हों तो a तथा b संख्याओं को क्रमशः **x-अंतः खण्ड (intercept)** तथा **y-अंतः खण्ड (intercept)** कहते हैं। उदाहरणस्वरूप, रेखा $2y=3x+5$ के लिए, x तथा y अंतः खण्ड क्रमशः $-\frac{5}{3}$ तथा $\frac{5}{2}$ है। यदि, रेखा मूलबिन्दु से होकर जाती है तो x तथा y अंतःखण्ड शून्य होते हैं। यदि, रेखा x-अक्ष के समान्तर है तो इसका x-अंतःखण्ड अपरिभाषित होता है। इसी प्रकार, y-अक्ष के समान्तर रेखा का y-अंतःखण्ड अपरिभाषित होता है।

निर्देशांक अक्षों के समान्तर रेखा का समीकरण अपेक्षाकृत सरल होता है। इस प्रकार, यदि, रेखा y-अक्ष के समान्तर है तो इस पर स्थित प्रत्येक बिन्दु का भुज एक स्थिरांक, माना a, होगा तथा इसका समीकरण $x=a$ होगा। इसी प्रकार यदि, रेखा x-अक्ष के समान्तर है तो इस पर स्थित प्रत्येक बिन्दु की कोटि एक स्थिरांक माना b, होगा और तब इसका समीकरण $y=b$ होगा। इस प्रकार x-अक्ष तथा y-अक्ष के समीकरण क्रमशः $y=0$ तथा $x=0$ होते हैं।

उदाहरणस्वरूप, उस रेखा का समीकरण, जो x-अक्ष के समान्तर तथा उससे 2 इकाई नीचे है, $y=-2$ हैं। उस रेखा का समीकरण, जो y-अक्ष के समान्तर तथा उससे दायीं तरफ 5 इकाई पर है, $x=5$ है।

7.12 समीकरण का बिन्दु-प्रवणता स्वरूप (The Point-Slope Form of the Equation)

अब हम एक रेखा का समीकरण, दिये हुए प्रतिबन्धों के आधार पर निर्धारित करने की स्थिति में हैं।

माना, $P_1 (x_1, y_1)$ एक नियत बिन्दु है और m दी हुयी प्रवणता है। यदि, $P (x, y)$, रेखा पर कोई प्रतीकात्मक बिन्दु हो तो $\frac{y-y_1}{x-x_1}$, P_1, तथा P से जाने वाली रेखा की प्रवणता है। परन्तु यह m के बराबर दी है। अतः

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m,$$

या,
$$y-y_1=m(x-x_1) \tag{1}$$

समीकरण (1), $P_1 (x_1, y_1)$ से गुजरने वाली तथा m-प्रवणता वाली रेखा का समीकरण है। यह सरल रेखा के समीकरण का बिन्दु-प्रवणता स्वरूप कहा जाता है, क्योंकि, यह विन्दु तथा प्रवणता के पदों में है।

ध्यान रखें कि, y-अक्ष के समान्तर रेखाओं के लिए, प्रवणता m अपरिभाषित है। अतः $P_1 (x_1, y_1)$ से गुजरने वाली एवं y-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण, बिन्दु-प्रवणता, समीकरण से नहीं प्राप्त होगा। फिर भी, इससे कोई परेशानी नहीं होती क्योंकि, इस प्रकार की किसी भी रेखा के लिये, इस रेखा पर के किसा बिन्दु का x-निर्देशांक x_1 तथा इस प्रकार की सरल रेखा का समीकरण $x=x_1$ होता है।

उदाहरण 1 : $(-1, -2)$ से जाने वाली एवं $\frac{4}{7}$ प्रवणता वाली रेखा का समीकरण ज्ञात करो।

हल : विन्दु-प्रवणता समीकरण में $x_1=-1$, $y_1=-2$ तथा $m=\frac{4}{7}$ रखने पर हम देखते हैं कि,

$$y-(-2)=\frac{4}{7}[x-(-1)]$$

या, $$y+2=\frac{4}{7}(x+1)$$

या, $$7y+14+4x=4$$

इसलिये, रेखा का समीकरण $y=\frac{4}{7}x-\frac{10}{7}$ है।

उदाहरण 2 : (3, —4) से गुजरने वाली एवं x-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण ज्ञात करो।

हल : x-अक्ष के समान्तर रेखा की प्रवणता शून्य होती है। इसलिये, बिन्दु-प्रवणता समीकरण से,

$$y-(-4)=0\ (x-3)$$

या, $$y+4=0.$$

इस प्रश्न को एक दूसरे तरीके से हल करने के लिए, ध्यान देना आवश्यक है कि रेखा पर का प्रत्येक बिन्दु एक ही कोटि रखता है। चूँकि एक बिन्दु की कोटि -4 है, सभी बिन्दुओं के लिये, हमें अवश्य ही $y=-4$, प्राप्त होगा।

7.13 समीकरण का प्रवणता-अन्त: खण्ड स्वरूप (The Slope-Intercept Form of the Equation)

यदि, कोई रेखा y-अक्ष के समान्तर नहीं है तो उसको y-अन्त: खण्ड और प्रवणता m से निर्धारित किया जा सकता है। यदि, रेखा का y-अन्त: खण्ड b हो तो वह रेखा $(0, b)$ से गुजरेगी। अत: रेखा का समीकरण इन राशियों के पदों में ज्ञात करने के लिए, हम बिन्दु प्रवणता स्वरूप का इस्तेमाल कर सकते हैं। बिन्दु-प्रवणता स्वरूप में (x_1, y_1) की जगह $(0, b)$ रखने पर, हम देखते हैं कि,

$$y-b=m\ (x-0)$$

या, $$y=mx+b.$$

यह उस रेखा का समीकरण है जिसकी प्रवणता m है तथा जो y-अंत: खण्ड b रखती है। सरल रेखा के समीकरण का यह स्वरूप कभी-कभी बहुत ही उपयोगी सिद्ध होता है क्योंकि, इससे प्रवणता एवं y-अंत: खण्ड प्राप्त होता है।

उदाहरण 1 : प्रवणता 3 तथा y-अंत: खण्ड 2 वाली रेखा का क्या समीकरण है ?

हल : प्रवणता-अंत: खण्ड समीकरण में, $m=3$ तथा $b=2$ रखने पर, हम देखते हैं कि,

$$y=3x+2$$

यही अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 2 : यदि, यह रेखा का समीकरण $5x+6y=7$ हो तो उसकी प्रवणता एवं y-अंत:खण्ड ज्ञात करा।

हल : y के लिए, हल करने पर हम देखते हैं कि,

$$y = -\frac{5}{6}x + \frac{7}{6}.$$

इस समीकरण की तुलना; प्रवणता-अंतःखण्ड स्वरूप से, करने पर हम देखते हैं कि, $m = -\frac{5}{6}$ तथा $b = \frac{7}{6}$ इसलिए, रेखा की प्रवणता $-\frac{5}{6}$ तथा उसका y-अंतः खण्ड $\frac{7}{6}$ है।

उदाहरण 3 : $(-3, 2)$ से गुजरने वाली तथा $3x-4y+7=0$ के लंबवत् रेखा का क्या समीकरण है ?

हल : दिए हुए समीकरण को y के लिए हल करने पर हम देखते हैं कि,

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$$

उपरोक्त समीकरण से यह विदित है कि रेखा की प्रवणता $\frac{3}{4}$ है। इसलिए, अभीष्ट लंबवत् रेखा की प्रवणता $-\frac{4}{3}$ होगी। बिन्दु-प्रवणता स्वरूप के प्रयोग से, इसका समीकरण निम्न है।

$$y-2 = -\frac{4}{3}[x-(-3)]$$

या, $3y-6 = -4x-12.$

या, $4x+3y+6=0.$

7.14 सरल रेखा तथा समीकरण $Ax+By+C=0$

अब, हमें यह दिखाना है कि प्रत्येक सरल रेखा एक प्रथम घात के समीकरण से निरूपित हो सकती है और इसका विलोम भी सत्य है।

प्रमेय 7.14.1. : जब A तथा B दोनों शून्य न हों तो समीकरण $Ax+By+C=0$, सर्वथा एक सरल रेखा का निरूपण करता है।

उपपत्ति : हम निम्नांकित दो दशाओं पर विचार करेंगे।

स्थिति (I) : यदि, $B=0$ तथा $A \neq 0$ तो समीकरण $Ax+By+C=0$, $Ax+C=0$. या $x = -\frac{C}{A}$ हो जाता है। यह समीकरण रेखा पर के उन सभी बिन्दुओं से सन्तुष्ट होता है जो y-अक्ष के समान्तर एवं उससे $-\frac{C}{A}$ इकाई पर है दूसरे बिन्दुओं से नहीं। अतः यह एक सरल रेखा का समीकरण है। उस स्थिति की, जहाँ पर $B \neq 0$ तथा $A=0$ हो, विवेचना ठीक इसी तरह की जा सकती है।

स्थिति (II) : यदि, $B \neq 0$ तथा $A \neq 0$ हो तो, हम समीकरण को y के लिए हल करके

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

प्राप्त करते हैं। यह एक $-\frac{A}{B}$, प्रवणता तथा $-\frac{C}{B}$, y-अंतः खण्ड वाली रेखा को व्यक्त करता है।

उपरोक्त प्रमेय का विलोम भी सत्य है, जो निम्नांकित प्रमेय में दिया जा रहा है।

प्रमेय 7.14.2 : प्रत्येक सरल रेखा का समीकरण $Ax+By+C=0$ प्रकार का होता है, जहाँ पर A, B तथा C अचर हैं।

उपपत्ति : दी हुई सरल रेखा या तो y-अक्ष को काटती है, या उसके समान्तर है, अथवा उसके सम्पाती है। हमें यह ज्ञात है कि, y-अक्ष को काटने वाली रेखा (जो y-अंतः खण्ड रखती है) को $y=mx+b$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। पुनः यदि, रेखा y-अक्ष के समान्तर या संपाती है तो इसका समीकरण $x=x_1$ प्रकार का होता है जहाँ पर संपाती की दशा में $x_1=0$ होता है। इनमें से दोनों समीकरण, प्रमेय में दिए हुए समीकरण के समान हैं। यही सिद्ध करना था।

हम, $Ax+By+C=0$ स्वरूप से निम्न प्रकार सरल रेखा के समीकरण का निर्धारण करते हैं।

उदाहरण 1 : (3, 4) तथा (2, −1) से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात करो।

हल : हम, A, B तथा C संख्याओं को इस प्रकार लेते हैं कि रेखा $Ax+By+C=0$ दिए हुए दो बिन्दुओं से होकर जाए।

यदि, $Ax+By+C=0$, (3, 4) से गुजरती है तो $3A+4B+C=0$.

यदि, यह (2, −1) से गुजरती है तो $2A-B+C=0$ अब, यदि, रेखा पर कोई बिन्दु (x, y) हो तो हम निम्नांकित समीकरण निकाय पाते हैं :

$$\left.\begin{array}{l} Ax+By+C=0 \\ 3A+4B+C=0 \\ 2A-B+C=0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

चूंकि, इन समीकरणों का हल अशून्य है, इसीलिए समीकरण (1) में A, B तथा C को विलुप्त करने पर, हम देखते हैं कि,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

सारणिकक विस्तार करने पर, हम देखते हैं कि,

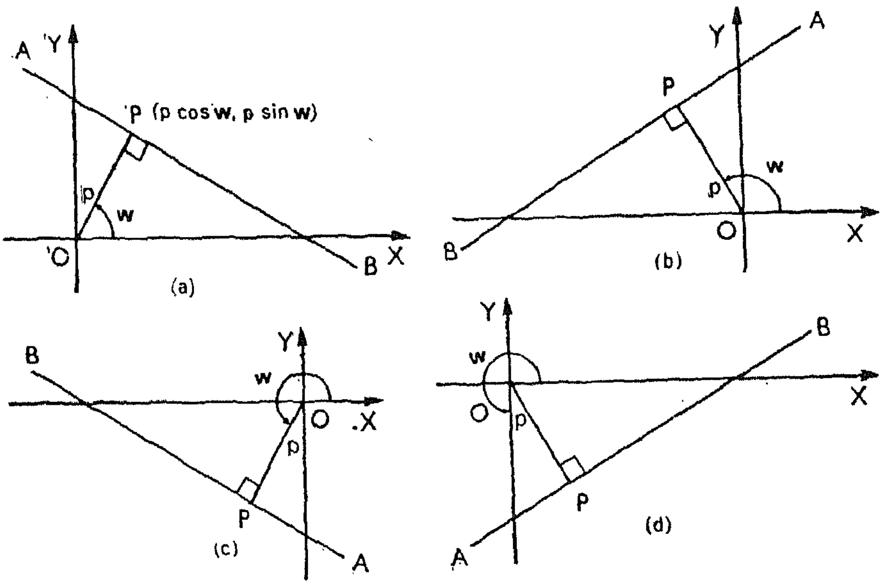
$$y=5x-11$$

इसलिए, (3, 4) तथा (2, −1) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण $y=5x-11$ है।

7.15 सरल रेखा के ससीमकरण का लंब स्वरूप (Perpendicular of the Equation of a Straight Line)

यदि, मूल बिन्दु (0, 0) से रेखा पर लंब की लम्बाई तथा लंब और x-अक्ष के बीच का कोण ज्ञात हो तो, रेखा का निर्धारण किया जा सकता है।

माना, AB कोई रेखा है। आकृति 7.22(a) से दिखाये गये भांति AB पर OP लम्ब खींचो। चार विभिन्न आकृतियाँ [देखें आकृति 7.22(a), (b), (c), (d)] रेखा AB की विभिन्न स्थितियों के लिए खींची गयी हैं। सर्वप्रथम आकृति 7.22(a) पर विचार करें।



आकृति 7.22

माना, लम्ब OP तथा घनात्मक x-अक्ष के बीच कोण ω है। तब, बिन्दु P के निर्देशांक ($p \cos \omega$, $p \sin \omega$) होंगे तथा AB की प्रवणता $-\dfrac{1}{\tan \omega} = -\cot \omega$ होगी।

यदि, AB पर कोई बिन्दु (x, y) हो तो बिन्दु प्रवणता सूत्र से,

$$y - p \sin \omega = -\cot \omega \, (x - p \cos \omega)$$

इसको सरल करने पर, हम देखते हैं कि,

$$x \cos \omega + y \sin \omega - p = 0. \qquad (1)$$

जो सरल रेखा के समीकरण का लम्ब-स्वरूप है। यह आसानी से सत्यापित किया जा सकता है कि, आकृति 7.22(b), (c), (d) पर विचार करने पर भी ठीक वही स्वरूप प्राप्त होता है। सरल रेखा के समीकरण को लंब-स्वरूप में परिष्कृत किया जा सकता है। यदि, व्यापक समीकरण $Ax + By + C = 0$ समीकरण (1) में दी हुयी रेखा को प्रदर्शित करें तो उपरोक्त टिप्पणी की सहायता से x, y तथा अचर पद के गुणांक एक दूसरे के समानुपाती होने चाहिए।

अर्थात् किसी $k \neq 0$ के लिए, $A = k \cos \omega$, $B = k \sin \omega$, $C = -kp$. यहाँ पर, चूंकि $A^2 + B^2 = k^2$ इसलिए, k को प्राप्त कर सकते हैं। पुनः क्योंकि p घनात्मक है, हम k के उस मान को लेते हैं जिससे $\dfrac{C}{-k}$ घनात्मक हो।

अब यदि $C>0$ हो तो $k=-\sqrt{A^2+B^2}$

तब $\cos\omega=\dfrac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin\omega=\dfrac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ तथा $-p=\dfrac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

इसलिए, $Ax+By+C=0$ का लंब-स्वरूप

$$\frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}x-\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (2) \text{ है।}$$

यदि $C<0$, $k=\sqrt{A^2+B^2}$, तथा $Ax+By+C=0$ का लम्ब स्वरूप

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y=-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ होगा।}$$

उदाहरण 1 : उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो, जिसके लिए $\omega=135°$ तथा लंबवत् दूरी 4 है।

हल : समीकरण (1) से, हम देखते हैं कि,

$$x\cos 135°+y\sin 135°-4=0$$

या, $$-\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-4=0.$$

या, $$-x+y-4\sqrt{2}=0.$$

उदाहरण 2 : समीकरण $x-y+1=0$ को लंब-स्वरूप में परिष्कृत करो और p का मान बताओ।

हल : समीकरण $x-y+1=0$ की तुलना लंब-स्वरूप $x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$ से करने पर, हम देखते हैं कि,

$$\frac{\cos\omega}{1}=\frac{\sin\omega}{-1}=\frac{-p}{1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

इसलिए, $\cos\omega=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\omega=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. तथा $p=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

अतः समीकरण $x-y+1=0$ का लंब स्वरूप,

$$-\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=0 \quad \text{है तथा } p=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

7.16. समीकरण का द्वि-बिन्दु स्वरूप (The Two-Point Form of the Equation)

हम जानते हैं कि, एक रेखा का निर्धारण दो सुव्यक्त बिंन्दुओं से होता है। इस प्रकार की रेखा का समीकरण बिन्दु प्रवणता समीकरण से ज्ञात किया जा सकता है। माना, $P_1(x_1, y_1)$ तथा $P_2(x_2, y_2)$ दो सुव्यक्त बिन्दु हैं। तब रेखा की प्रवणता,

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\ x_2\neq x_1.$$

इस प्रकार, बिन्दु-प्रवणता स्वरूप से, इसका समीकरण निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1). \qquad (1)$$

या, $$(y-y_1)(x_2-x_1)=(y_2-y_1)(x-x_1),$$

यह समीकरण, रेखा का द्वि-बिन्दु स्वरूप (**two-point form**) कहलाता है।

विशिष्ट दशा में, माना, $x_2=x_1$ तब, या तो $y_2=y_1$ या $x_2=x_1$ परन्तु $y_2\neq y_1$, कल्पना स। इसलिये, इस दशा में, $x=x_1$, जो y-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण है। इसी तरह, यदि, $y_2=y_1$ तब $x_2\neq x_1$, परन्तु $y=y_1$, x-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण है।

अब, हम बिन्दुओं P_1 (x_1, y_1) तथा P_2 (x_2, y_2) से जाने वाला रेखा का समीकरण एक दूसरे स्वरूप में ज्ञात करेंगे। माना

$$Ax+By+C=0 \tag{2}$$

अभीष्ट रेखा का समीकरण है। चूंकि, यह बिन्दुओं P_1 तथा P_2 से गुजरती है, इसलिये,

$$Ax_1+By_1+C=0 \tag{3}$$

$$Ax_2+By_2+C=0 \tag{4}$$

समीकरण (2), (3) तथा (4) से A, B तथा C को विलुप्त करने पर हम देखते है कि,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{5}$$

यह रेखा का द्वि-बिन्दु समीकरण, रेखा के समीकरण का सारणिक स्वरूप (**determinant form**) भी कहा जाता है।

अब, हम देखेंगे कि, समीकरण (1) तथा (5) में दिये हुए दोनों स्वरूप तुल्य हैं। हम निम्न प्रकार अग्रसर होते हैं :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \end{vmatrix}=0 \qquad \text{(क्यों ?)}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-x_1)\ (y_2-y_1)-(y-y_1)\ (x_2-x_1)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ (x-x_1)$$

उदाहरण 1 : (2, 3) तथा (6, 2) से जाने वाली रेखा का क्या समीकरण है ?

हल :

विधि 1 : माना, (2, 3) बिन्दु P_1 तथा (6, 2) बिन्दु P_2 हैं। द्वि-बिन्दु समीकरण स्वरूप से, हम देखते हैं कि,

$$y-3=\frac{2-3}{6-2}\ (x-2)$$

या, $$y-3=-\frac{1}{4}\ (x-2).$$

या, $$4y-12+x-2=0$$

या, $$x+4y=14$$

[यदि, P_1 बिन्दु (6, 2) तथा P_2 बिन्दु (2, 3) हो तो रेखा का समीकरण क्या होगा ?]

विधि (II) : सारणिक स्वरूप के प्रयोग से,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

या, $x(3-2) - y(2-6) + (4-18) = 0$

या, $x + 4y - 14 = 0$

या, $x + 4y = 14.$

उदाहरण 2 : (4, —3) से गुजरने वाली तथा (1, 1) और (2, 3) सिरोंवाली रेखा के समान्तर रेखा का समीकरण ज्ञात करो ।

हल : (1, 1) तथा (2, 3) से जाने वाली रेखा की प्रवणता m, $m = \frac{3-1}{2-1} = 2$ से दी जाती है ।

इस रेखा के समान्तर किसी रेखा की प्रवणता 2 होगी । इसलिये, इस प्रकार की रेखा का समीकरण निम्नांकित है :

$$y - (-3) = 2(x - 4)$$

या, $2x - y = 11$

प्रश्नावली 7.6

1 से 10 तक के प्रत्येक प्रश्न में, रेखा का समीकरण ज्ञात करो ।

1. (4, 3) से गुजरती है और प्रवणता 2 है ।
2. (—2, 2) से गुजरती है और प्रवणता —3 है ।
3. (—7, —4) से गुजरती है और प्रवणता —2 है ।
4. (0, —2) से गुजरती है और प्रवणता —4 है ।
5. (0, 2) तथा (0, 4) से गुजरती है ।
6. (0, —3) तथा (5, 0) से गुजरती है ।
7. (2, 6) तथा (2, 5) से गुजरती है ।
8. (—1, —2) तथा (—5, —2) से गुजरती है ।
9. (0, 0) से गुजरती है और प्रवणता 1 है ।
10. प्रवणता 5 तथा y-अन्तःखण्ड 5 है ।
11. उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो, जिसका y-अन्तःखण्ड 4 है । तथा जो रेखा $2x - 3y = 7$ के समान्तर है ।
12. उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो, जिसका x-अन्तःखण्ड —3 है तथा जो रेखा $3x + 5y = 4$ पर लम्ब है ।
13. यदि किसी त्रिभुज के शीर्ष (—1, 8), (4, —2), (—5, —3) हों तो उस त्रिभुज की भुजाओं के समीकरण ज्ञात करो ।

14. यदि, किसी त्रिभुज की भुजाओं के मध्यबिन्दु (2, 1), (−5, 7) तथा (−5, −5) हों तो भुजाओं के समीकरण ज्ञात करो।

15. उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो, जो $2x+5y=7$ के समान्तर है और (2, 7) तथा (−4, 1) को मिलाने वाली रेखा के मध्यबिन्दु से गुजरती है।

16. उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो, जो $3x+2y=8$ पर लम्ब है तथा (5, −2) और (2, 2) को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु से गुजरती है।

17. (*i*) से (*iv*) तक के प्रत्येक प्रश्न में, रेखा की प्रवणता एवं *y*-अन्तःखण्ड ज्ञात करो :

(*i*) $4x+y-5=0$ (*ii*) $x+y=0$

(*iii*) $y+2=0$ (*iv*) $\frac{y}{x}=2.$

18. p तथा ω के दिए हुए मानों की सहायता से, रेखाओं के समीकरण का लम्ब-स्वरूप ज्ञात करो।

(*i*) $p=3,\quad \omega=45°$

(*ii*) $p=-5,\quad \omega=30°$

(*iii*) $p=-5,\quad \omega=135°$

(*iv*) $p=1,\quad \omega=90°$

19. निम्नांकित में से प्रत्येक को लम्ब-स्वरूप में परिष्कृत करो तथा p का मान बताओ :

(*i*) $x+y-2=0$ (*ii*) $4x+3y-9=0$

(*iii*) $x-4=0$ (*iv*) $y-2=0$

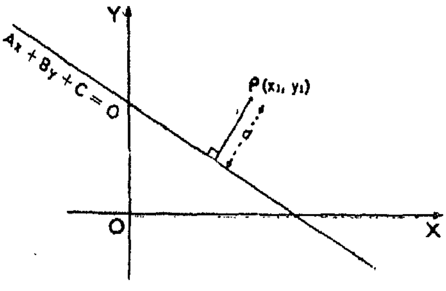
20. $2x-y+3=0$ तथा $x-4y-7=0$ रेखाओं में से कौन सी रेखा मूलबिन्दु से ज्यादा दूर है ?

21. एक रेखा की मूल बिन्दु से लम्बवत् दूरी 5 से० मी० तथा उसकी प्रवणता −1 है। उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो।

7.17 एक बिन्दु से एक रेखा की दूरी (Distance of a Point From a Line)

किसी बिन्दु (x_1, y_1) की रेखा $Ax+By+C=0$ से दूरी d निम्न सूत्र से दी जाती है।

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$



आकृति 7.23

उदाहरण 1 : रेखा $3x-4y+12=0$ तथा बिन्दु $(4, 1)$ के बीच की दूरी ज्ञात करो।

हल : चूंकि $A=3$, $B=-4$, $C=12$, $x_1=4$ तथा $y_1=1$,

इसलिए, दूरी सूत्र की सहायता से, हम देखते हैं कि,

$$d=\frac{|3\times 4+(-4)\times 1+12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

$$=\frac{|12-4+12|}{\sqrt{25}}=\frac{20}{5}=4.$$

प्रश्नावली 7.7

1 से 7 तक के प्रश्नों में रेखा-युग्मों का संपाती, समान्तर या प्रतिच्छेदी रेखाओं के रूप में वर्गीकरण करो।

1.	$6x+14y-16=0,$	$12x+28y-32=0.$
2.	$\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}y-4=0,$	$3x+\frac{5}{2}y-4=0.$
3.	$3x-4y=8,$	$3x+4y=11.$
4.	$5x-2y=7,$	$2y-5x=-7.$
5.	$x+y=0,$	$x-y=0.$
6.	$4x+7y=19,$	$7x-4y=-2.$
7.	$x-2y=7,$	$4y-2x=13.$

8 से 14 तक के प्रत्येक प्रश्न में, रेखा तथा बिन्दु के बीच की दूरी ज्ञात करो।

8.	$4x+3y-5=0,$	$(-2,-1)$
9.	$x-2y-10=0,$	$(2,-5)$
10.	$7x-24y-15=0,$	$(-3, 1)$
11.	$5x+12y-41=0,$	$(3, 0)$
12.	$x+y=0,$	$(0, 0)$
13.	$x=3,$	$(1, 1)$
14.	$y=4,$	$(2, 3)$

7.18 रेखा-कुल (Families of Lines)

हम देख चुके हैं कि कोई भी x तथा y में प्रथम घात का समीकरण, एक सरल रेखा निरूपित करता है। उदाहरणार्थ, व्यापक समीकरण $Ax+By+C=0$ सर्वथा एक सरल रेखा व्यक्त करता है। इस समीकरण में, स्पष्टतया तीन अचर हैं और वे A, B तथा C हैं जहाँ पर A, B में से कम से कम एक शून्य नहीं है। इस

समीकरण में मुख्यत: दो अचर हैं क्योंकि, जब हम दोनों पक्षों को अ-शून्य गुणांक (माना, यह A है) से भाग देते हैं तो देखते हैं कि,

$$x+\frac{B}{A}\ y+\frac{C}{A}=0.$$

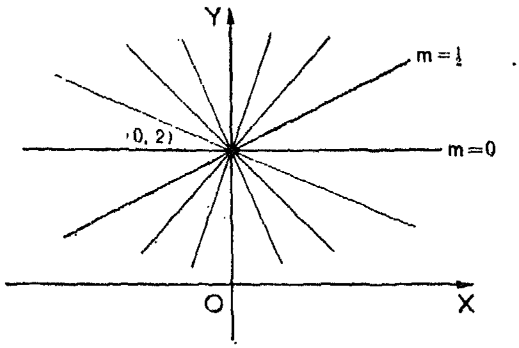
या $x+ay+b=0,$ जहाँ $a=\frac{B}{A}$ तथा $b=\frac{C}{A}.$

चूंकि अचरों की संख्या इससे कम नहीं की जा सकती इसलिए हम कह सकते हैं कि, किसी सरल रेखा के समीकरण में दो मुख्य अचर हैं।

यदि, हम रेखा पर एक प्रतिबन्ध आरोपित करें तो दो आवश्यक अचरों में एक समीकरण प्राप्त होता है और एक दूसरा प्रतिबन्ध आरोपित करने पर, दो अज्ञात राशियों के पदों में एक दूसरा रैखिक समीकरण प्राप्त होता है। चूंकि, दो रैखिक समीकरण, जो दो अज्ञात राशियों में है, को एक ही साथ हल किया जा सकता है, बशर्ते कि वे समान्तर न हों। हम देखते हैं कि, एक रेखा के अद्वितीय निर्धारण के लिए, दो प्रतिबन्ध आवश्यक हैं। इसको पाठकों ने एक सरल रेखा के समीकरण के विभिन्न स्वरूपों को ज्ञात करने से देखा होगा।

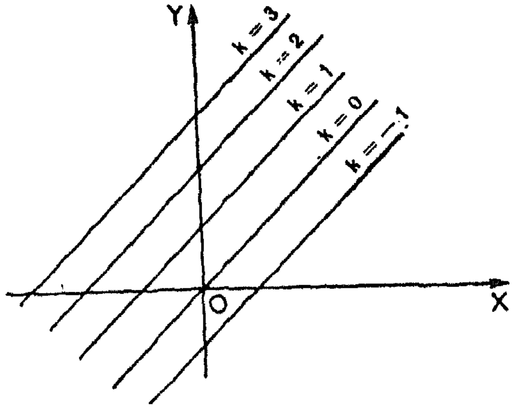
एक रेखा के अद्वितीय निर्धारण के लिए, दो प्रतिबन्ध आवश्यक हैं। इनमें से एक प्रतिबन्ध, दो आवश्यक अचरों के बीच रैखिक सम्बन्ध की स्थापना करता है जिससे एक अचर दूसरे के पदों में ज्ञात हो जाता है। अतः एक प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट करने वाली रेखायें, एक एकल अचर पर, निर्भर करती हैं। इस प्रकार की रेखा-पद्धति को **एक प्राचल रेखा-कुल (one-parametor family)** तथा अनिर्धारित अचर को **प्राचल (parameter)** कहते हैं।

उदाहरणार्थ, $y=mx+2$ पर विचार करो, जहाँ m वास्तविक है परन्तु अन्यथा अप्रतिबन्धित है। m के प्रत्येक सुव्यक्त मान के लिए, हम एक सुव्यक्त रेखा पाते हैं। फिर भी, वे सभी एक सर्वनिष्ठ गुण-धर्म रखती हैं और वह यह है कि उन सभी के y अन्तःखण्ड 2 हैं। m के सभी मानों के लिए प्राप्त रेखा समुच्चय, एक प्राचल रेखा-कुल होता है जिनके y-अन्तःखण्ड 2 हैं। इस कुल की कुछ रेखाओं को आकृति 7.24 में दिखाया गया है।



आकृति 7.24

उदाहरण 1 : $y=x+k$ पर विचार करो, जहाँ k एक प्राचल है। k के विभिन्न मानों के लिए, आकृति 7.25 में इस कुल के कुछ सदस्यों को दिखाया गया है। ध्यान रखें कि, इस कुल के विन्नि सदस्यों का प्रवणता एक ही है और इसलिये, वे परस्पर समान्तर हैं। ये सदस्य, एक दूसरे से केवल y-अन्तः खण्ड में ही विभिन्नता रखते हैं।



आकृति 7.25

उदाहरण 2 : रेखा-कुल का समीकरण लिखो, जबकि,

(*i*) प्रवणता 3;

(*ii*) x-अन्तःखण्ड 2;

(*iii*) $2x-5y-6=0$ लंब है।

हल : (*i*) प्रवणता-अन्तःखण्ड स्वरूप से, इस प्रकार की रेखा का समीकरण $y=3x+k$ है, जहाँ k एक प्राचल है।

(*ii*) चूँकि x-अन्तःखण्ड 2 है, इसलिये, कुल के सदस्य सभी $(2, 0)$ से गुजरेंगे। अतः बिन्दु-प्रवणता स्वरूप से, इस प्रकार की रेखा का समीकरण $y=k\ (x-2)$ है, जहां k एक प्राचल है।

(*iii*) दी हुयी रेखा की प्रवणता $\frac{2}{5}$ है। अतः इसके लंबवत् सभी रेखाओं की प्रवणता $-\frac{5}{2}$ होगी।

इस प्रकार, प्रवणता-अंतः खण्ड स्वरूप से, इस प्रकार की रेखा का समीकरण $y=-\frac{5}{2}x+k$ है जहाँ k एक प्राचल है। इसलिये, $y=3x+k$, $y=k\ (x-2)$ तथा $y=-\frac{5}{2}\ x+k$, जहां k एक प्राचल है, तीन रेखा-कुल हैं।

उदाहरण 3 : रेखाओं $2x-y+3=0$ तथा $x-5y+3=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु तथा बिन्दु $(8, 5)$ से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात करो।

हल : दी हुयी रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा-कुल निम्नांकित है :

$$(2x-y+3)+k(x-5y+3)=0$$

हमें इस रेखा-कुल की विशिष्ट रेखा प्राप्त करनी है जो (8, 5) से गुजरती है। अतः इस बिन्दु के निर्देशांक, कुल के समीकरणों को अवश्य संतुष्ट करेंगे। इस प्रकार,

$$(2\times 8-5+3)+k(8-5\times 5+3)=0.$$

या $\quad 14-14\,k-0.$

अतः $\quad k=1.$

इसलिये, अभीष्ट समीकरण निम्नांकित है :

$$(2x-y+3)+1(x-5y+3)=0.$$

या, $\quad 3x-6y+6=0 \quad$ या, $\quad x-2y+2=0.$

उदाहरण 4 : $3x+4y=7$ तथा $x-y+2=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो, जिसकी प्रवणता 5 है।

हल : रेखा-कुल का समीकरण निम्नांकित होगा :

$$(3x+4y-7)+k(x-y+2)=0$$

या, $\quad (3+k)x+(4-k)y+(2k-7)=0$

कुल के प्रत्येक सदस्य की प्रवणता $\dfrac{k+3}{h-4}$ है।

परन्तु रेखा की प्रवणता 5 दी हुयी है, अतः

$$\frac{k+3}{k-4}=5$$

या, $\quad k+3=5k-20.$

अर्थात् $\quad k=\dfrac{23}{4}$

इसलिये अभीष्ट रेखा का समीकरण निम्नांकित है :

$$(3x+4y-7)+\frac{23}{4}(x-y+2)=0$$

या, $\quad 4(3x+4y-7)+23(x-y+2)\ 20.$

या, $\quad 35x-7y+18=0.$

प्रश्नावली 7.8

1. $x+2y=5$ तथा $x-3y=7$ के प्रतिच्छेद बिन्दु तथा निम्नांकित बिन्दु से गुजरने वाली रेखाओं का समीकरण ज्ञात करो :

(*i*) (0, 0) (*ii*) (2, −3)

(*iii*) (1, 0) (*iv*) (0, −1)

2. $5x-3y=1$ तथा $2x+3y=23$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरने वाली और उस रेखा के लम्बवत् रेखा का समीकरण ज्ञात करो, जिसका समीकरण निम्नांकित है :

(i) $x-2y=3$ (ii) $x=0$

(iii) $y=0$ (iv) $5x-3y=1$

3. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो, जो $x+2y-3=0$ तथा $4x-y+7=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाती है और $5x+4y-20=0$ के समान्तर है।

4. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करो, जो $2x+3y-4=0$ तथा $x-5y+7=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाती है और उसका x-अन्तःखण्ड -4 के बराबर है।

7.19 वृत्त (Circle)

परिभाषा 7.19.1 : वृत्त (**circle**) एक समतल में इस प्रकार के बिन्दुओं का समुच्चय है कि प्रत्येक की एक नियत बिन्दु से दूरी धनात्मक अचर होती है।

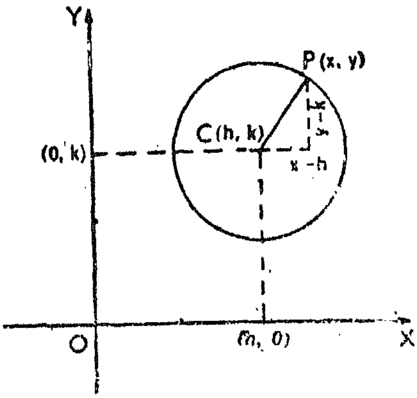
नियत बिन्दु को केन्द्र (**centre**) तथा दी हुई दूरी को वृत्त की त्रिज्या (**radius**) कहते हैं।

केन्द्र और त्रिज्या ज्ञात होने पर, अब हम वृत्त का समीकरण ज्ञात करेंगे।

प्रमेय *7.19.1* **:** अगर वृत्त का केन्द्र C (h, k) तथा त्रिज्या r हो तो उसका समीकरण

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \qquad (1)$$ होता है।

उपपत्ति : माना, P (x, y), वृत्त पर कोई बिन्दु है (आकृति 7.26 देखें)।



आकृति 7.26

तब, $|CP| = r$ दूरी-सूत्र की सहायता से

$$|CP| = \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$$

इसलिए, $$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

या $$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$ यही सिद्ध करना था।

इस प्रकार, P, इस बिन्दु-पथ पर अवस्थित है। यदि, इस बिन्दु पथ पर कोई बिन्दु Q (x_1, y_1) हो तो $(x_1-h)^2-(y_1-k)^2=r^2$ और इसलिए दूरी $OQ=r$। समीकरण $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ एक r त्रिज्या के वृत्त का निरूपण करता है जिसका केन्द्र (h, k) पर है।

उपप्रमेय : यदि, r त्रिज्या के वृत्त का केन्द्र मूल बिन्दु पर हो तो वृत्त का समीकरण

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (2)$$

हो जाता है।

समीकरण (1), वृत्त के समीकरण का **मानकस्वरूप (standard form)** कहलाता है। वृत्त तभी वास्तविक है जबकि $r^2>0$ यदि $r^2<0$ तो समतल का कोई भी बिन्दु समीकरण (1) को नहीं सन्तुष्ट करता और हम देखते हैं कि समीकरण का आलेख रिक्त है।

उदाहरणस्वरूप, समतल में कोई भी रेखा बिन्दु नहीं है जो $x^2+y^2=-1$ को संतुष्ट करे। यदि $r^2=0$ तो समीकरण (1) $(x-h)^2+(y-k)^2=0$ हो जाता है। इससे $x=h$ तथा $y=k$ प्राप्त होता है। (क्यों?) इसलिए, इस प्रकार के वृत्त को केवल एक बिन्दु संतुष्ट करता है और यह बिन्दु केन्द्र के संपाती होता है। इस प्रकार का वृत्त **बिन्दु-वृत्त (point circle)** कहलाता है। इस प्रकार, बिन्दु-वृत्त वह वृत्त है जिसकी त्रिज्या शून्य होती है।

समीकरण

$$Ax^2+Cy^2+Bxy+Dx+Ey+F=0. \qquad (3)$$

पर विचार करो, जो द्वितीय घात के सभी संभव पदों यथा Ax^2, Bxy तथा Cy^2; प्रथम घात के सभी सम्भव पदों यथा Dx तथा Ey और शून्य घात के पद यथा अचर पद F का समावेश करता है। इस समीकरण को **द्विघात घात का व्यापक समीकरण** कहते हैं।

अब, हम देखेंगे कि, समीकरण (1), वास्तव में, द्वितीय घात के व्यापक समीकरण की एक विशिष्ट दशा है।

समीकरण (1) के कोष्ठकों को दूर करने पर, हम देखते हैं कि,

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2$$

या, $$x^2+y^2-2hx-2ky+(h^2+k^2-r^2)=0 \qquad (4)$$

समीकरण (3) तथा (4) की तुलना करने से हम देखते हैं कि समीकरण (3) एक वृत्त होगा यदि $A=C, B=0$ इसलिए वृत्त के समीकरण का व्यापक रूप

$$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (5)$$

है। इसको निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

$$x^2+y^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0,$$

या, $$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2} \qquad (6)$$

समीकरण (6), समीकरण (1) के रूप में है। यह, $\left(\frac{-D}{2A}, \frac{-E}{2A}\right)$ केन्द्र वाले वृत्त का निरूपण करता है, यदि, $(D^2+E^2-4AF)>0$; यह बिदु-वृत्त का निरूपण करता है, जिसका केन्द्र $\left(\frac{-D}{2A}, \frac{-E}{2A}\right)$ है, यदि, $D^2+E^2-4AF=0$ तथा यदि, $D^2+E^2-4AF<0$ तो समीकरण (6) का आलेख रिक्त होता है।

समीकरण (1) या (5) किन्हीं समीकरणों से, हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि, वृत्त के निरूपण के लिए तीन प्रतिबन्धों की आवश्यकता होती है क्योंकि तीन अचरों का मान ज्ञात करना होता है तथा प्रत्येक प्रतिबंध तीन अचरों के बीच एक सम्बन्ध स्थापित करता है। फिर भी, हमें ध्यान रखना है कि केन्द्र का ज्ञान दो प्रतिबंधों के तुल्य है क्योंकि इसके निर्देशांक इन समीकरणों के दो अचरों को ज्ञात करते हैं। तीनों प्रतिबंध विभिन्न रूपों में हो सकते हैं, उनमें कुछ को निम्नांकित उदाहरणों में दिया गया है।

उदाहरण 1 : उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करो, जिसका केन्द (−3, 2) पर है और त्रिज्या 4 है।

हल : यहाँ पर बिन्दु (h, k), $(-3, 2)$ तथा त्रिज्या 4 है। अतः समीकरण (1) में, $h=-3$, $k=2$ तथा $r=4$ प्रतिस्थापित करने पर,

$$[x-(-3)]^2+(y-2)^2=(4)^2$$

या, $$(x+3)^2+(y-2)^2=16$$

उदाहरण 2 : वृत $x^2+y^2-2x+4y=8$ का केन्द्र एवं त्रिज्या ज्ञात करो।

हल : दिये हुए समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$(x^2-2x)+(y^2+4y)=8$$

कोष्ठकों में वर्ग पूर्ण करने पर, हम देखते हैं कि,

$$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=8+1+4.$$

या, $$(x-1)^2+(y+2)^2=13$$

इसकी तुलना वृतक् के मानक स्वरूप से करने पर, हम देखते हैं कि वृत का केन्द्र (1, −2) पर है और त्रिज्या $\sqrt{13}$ है।

उदाहरण 3 : बिन्दुओं (1, 0), (−1, 0) तथा (0, 1) से जाने वाले वृत का समीकरण ज्ञात करो।

हल : तीनों बिन्दुओं के निर्देशांकों को समीकरण (4) में क्रम से रखने पर, हम देखते हैं कि,

$$2h-e=1$$
$$2h+e=-1$$
$$2k-e=1$$

जहाँ $$e=(h^2+k^2-r^2)$$

इन युगपत् समीकरणों का हल, $h=0$, $k=0$ तथा $e=-1=-r^2$ है। इसलिये, इन तीन बिन्दुओं से जाने वाले वृत का समीकरण $x^2+y^2=1$ है।

प्रश्नावली 7.9

1. निम्नांकित वृत्तों में से प्रत्येक का केन्द्र एवं त्रिज्या ज्ञात करो :

(i) $x^2+(y-1)^2=2$ (ii) $(x+5)^2+(y-3)^2=30$

(iii) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{4}$ (iv) $x^2+y^2-4x+6y=5$

(v) $x^2+y^2-x+2y-3=0$

2. निम्नांकित वृत्तों में से प्रत्येक का समीकरण ज्ञात करो जबकि,

   (*i*) केन्द्र $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ तथा त्रिज्या $\frac{1}{12}$

   (*ii*) केन्द्र $(-3, -2,)$ तथा त्रिज्या 7

   (*iii*) केन्द्र, रेखा $x-4y=1$ पर अवस्थित है और वृत्त बिन्दुओं $(3, 7)$ तथा $(5, 5)$ से गुजरता है।

   (*iv*) वृत्त, बिन्दु $(2, 4)$ से होकर जाता है और केन्द्र, रेखाओं $x-y=4$ तथा $2x+3y=-7$ के प्रतिच्छेद बिन्दु पर है।

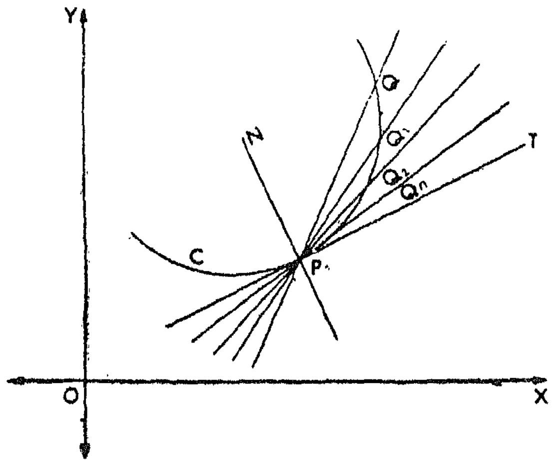
   (*v*) बिन्दुओं $(2, -6)$, $(6, 4)$ तथा $(-3, 1)$ से गुजरता है।

   (*vi*) उस त्रिभुज के शीर्षों से गुजरता है, जिसकी भुजायें $x+y=2$, $3x-4y=6$ तथा $x-y=0$ पर हैं।

3. दिखाओ कि, तीन दिए हुए बिन्दुओं से, संरेख नहीं है, केवल एक वृत्त खींचा जा सकता है।

7.20 वृत्त पर स्पर्शी तथा अभिलम्ब के समीकरण (Equations of Tangent and Normal to a Circle)

वृत्त पर स्पर्शी (tangent) तथा अभिलम्ब (normal) के समीकरण ज्ञात करने के पहले, हम एक वक्र पर स्पर्शी तथा अभिलम्ब की परिभाषा करेंगे।



आकृति 7.27

माना, वक्र C पर, P तथा Q दो बिन्दु हैं, जैसा कि, आकृति 7.26 में दिखाया गया है। छेदक रेखा PQ खींचो। अब, जैसे-जैसे बिन्दु Q वक्र C पर P की तरफ बढ़ता है, छेदक रेखा PQ, P के परितः घूमती है (P के परितः घूर्णन करती है) और जब Q, P के बहुत पास होता है तो रेखा PQ सीमांत रेखा PT के संपाती होती है। सीमान्त छेदक रेखा PT, बिन्दु P पर वक्र की **स्पर्शी रेखा** कहलाती है।

वक्र के लिए अभिलम्ब PN, वह रेखा है जो बिन्दु P पर वक्र के स्पर्शी पर लम्ब है।

वक्र पर किसी दिए बिन्दु पर स्पर्शी तथा अभिलंब का समीकरण ज्ञात करने के लिए, हमें स्पर्शी की प्रवणता ज्ञात करना आवश्यक है।

माना, वृत्त $x^2+y^2=a^2$ पर किसी बिंदु P के निर्देशांक (x_1, y_1) हो तो

$$x_1^2+y_1^2=a^2 \quad (1)$$

वृत्त पर एक दूसरा बिन्दु Q (x_2, y_2) लो। तब,

$$x_2^2+y_2^2=a^2 \quad (2)$$

अब, द्विबिन्दु सूत्र से, PQ का समीकरण

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-y_1}(x-y_1) \quad (3)$$

समीकरण (2) को समीककण (1) में से घटाने पर, होगा

$$y_1^2-y_2^2=x_2^2-x_1^2$$

या, $(y_1-y_2)(y_1+y_2)=(x_2+x_1)(x_2-x_1)$

इसलिए, $$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{(x_2-x_1)}{(y_2+y_1)} \quad (4)$$

चूंकि, जैसे Q, P की ओर अग्रसर होता है, सीमान्त स्थिति में, जीवा PQ वक्र पर स्पर्शी है, इसलिए,

जैसे Q, P की ओर अग्रसर होता है अर्थात् $x_2\to x_1$ तथा $y_2\to y_1$,

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\to\frac{-2x_1}{2y_1}$$

और समीकरण (3),

$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$ में परिष्कृत हो जाता है।

या, $xx_1-x_1^2+yy_1-y_1^2=0$

या, $xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2=a^2$

इस प्रकार, वृत $x^2+y^2=a^2$ की किसी बिंदु (x_1, y_1) पर स्पर्शी का समीकरण

$$xx_1+yy_1=a^2 \quad (5)$$

होता है।

यदि, हमें वृत्त के व्यापक समीकरण $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ के लिए किसी बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्शी का समीकरण ज्ञात करना हो तो ऊपर की भांति हम अग्रसर हो सकते हैं। स्पर्शी का समीकरण, निम्न होगा।

$$xx_1+yy_1+\frac{D}{2}(x+x_1)\,\frac{E}{2}(y+y_1)+F=0 \quad (6)$$

(पाठकगण स्वयं इस समीकरण का निर्धारण करें।)

यह ध्यान में रखा जा सकता है कि, वृत्त के समीकरण से ही किसी विंदु (x_1, y_1) पर स्पर्शी का समीकरण ज्ञात करने के लिए, x^2 की जगह xx_1 y^2 की जगह yy_1, x की जगह $\frac{x+x_1}{2}$ तथा y की जगह $\frac{y+y_1}{2}$ प्रतिस्थापित करना पड़ता है।

स्पर्शी का समीकरण, कलन (calculus) की विधि से भी ज्ञात किया जा सकता है।

स्मरण रखें कि, वक्र के किसी बिन्दु पर अभिलंब, वह रेखा है जो उस बिन्दु से गुजरती है और वक्र के उस बिन्दु पर स्पर्शी पर लंब है। चूँकि, वृत $x^2+y^2=a^2$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्शी का समीकरण $xx_1+yy_1=a^2$ है, इसलिये इस रेखा के लंबवत् कोई रेखा

$$xy_1-yx_1=\lambda \quad \text{होगी।}$$

λ को इस प्रकार चुनो कि, यह (x_1, y_1) से गुजरे। तब,

$$\lambda=x_1y_1-y_1x_1=0$$

अतः वृत $x^2+y^2=a^2$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलम्ब का समीकरण

$$y_1x-x_1y=0 \qquad (7) \text{ है।}$$

ध्यान रखें कि, अभिलम्ब उस केन्द्र से गुजरता है जो प्रत्याशित मूल बिन्दु है।

यदि, वृत का समीकरण, $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, है तो उसी प्रकार दिखाया जा सकता है कि, बिन्दु $(x_1\ y_1)$ पर अभिलम्ब का समीकरण,

$$y\left(x_1+\frac{D}{2}\right)-x\left(y_1+\frac{E}{2}\right)+\frac{E}{2}x_1-\frac{D}{2}y_1=0 \quad (8) \quad \text{है।}$$

ध्यान रखें कि, वृत का अभिलम्ब, सर्वदा, वृत के केन्द्र से गुजरता है। इसलिये, वृत के किसी बिन्दु पर अभिलम्ब वह रेखा है जो वृत के केन्द्र और उस बिन्दु को मिलाती है।

उदाहरण 1 : वृत $x^2+y^2=13$ के बिन्दु $(2, 3)$ पर स्पर्शी का समीकरण ज्ञात करो।

हल : वृत $x^2+y^2=a^2$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्शी का समीकरण $xx_1+yy_1=a^2$ है।

$x_1=2$, $y_1=3$ तथा $a^2=13$ प्रतिस्थापित करने पर दिये हुए वृत पर स्पर्शी का समीकरण,

$$2x+3y=13 \text{ है।}$$

उदाहरण 2 : वृत $x^2+y^2-26x+12y+105=0$ के बिन्दु $(7, 2)$ पर स्पर्शी तथा अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात करो।

हल : उपरोक्त वृत के समीकरण की तुलना वृत के मानक समीकरण से करने पर, हम देखते हैं कि,

$$D=-26, \quad E=12, \quad F=105$$

तथा $\quad x_1=7, \quad y_1=2$

इसलिये, समीकरण (6) से, स्पर्शी का समीकरण निम्नांकित है :

$$7x+2y-\frac{26}{2}(x+7)+\frac{12}{2}(y+2)+105=0$$

या, $\quad 7x+2y-13(x+7)+6(y+2)+105=0$

या, $\quad 7x+2y-13x-91+6y+12+105=0$

या, $\quad -6x+8y+26=0$

या, $\quad 3x-4y-13=0$

समीकरण (8) से, अभिलम्ब का समीकरण निम्नांकित है :

$$y(7-13)-x(2+6)+6\times 7+13\times 2=0$$

या, $\quad -6y-8x+42+26=0$

या, $\quad -8x-6y+68=0$

या, $\quad 4x+3y-34=0$

प्रश्नावली 7.10

1. दिये हुए वृतों के लिये, विनिर्दिष्ट बिन्दुओं पर स्पर्शी तथा अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात करो :

   (i) $x^2+y^2-2;$ $\quad (1, 1)$

   (ii) $x^2+y^2=10;$ $\quad (1,-3)$

   (iii) $x^2+y^2=25;$ $\quad (-3,-4)$

   (iv) $x^2+y^2-30x+6y+109=0;$ $\quad (4,-1)$

   (v) $x^2+y^2-26x-2y+45=0;$ $\quad (2, 3)$

   (vi) $x^2+y^2-2x-10y+1=0;$ $\quad (-3, 2)$

   (vii) $x^2+y^2-2ax=0;$ $\quad (a(1+\cos\alpha), a\sin\alpha)$

2. दिखाओ कि, α के सभी मानो के लिये, बिन्दु $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ वृत $x^2+y^2=a^2$ पर अवस्थित है। यह भी दिखाओ कि, इस बिन्दु पर स्पर्शी का समीकरण $x\cos\alpha+y\sin\alpha=0$ तथा अभिलम्ब का समीकरण $x\sin\alpha-y\cos\alpha=0$ है। पुनः दिखाओ कि, रेखा $x\sin\alpha-y\cos\alpha=a$ भी, α के सभी मानों के लिए, वृत पर स्पर्शी है।

3. रेखा $y=m\alpha+c$ तथा वृत $x^2+y^2=a^2$ के प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात करो। वह प्रतिबन्ध ज्ञात करो जब यह रेखा वृत की स्पर्शी है।

4. रेखा $lx+my=n$ का, वृत $x^2+y^2=a^2$ की स्पर्शी होने का प्रतिबंध ज्ञात करो।

5. दिखाओ कि, बिन्दु $(x_1\ y_1)$ से वृत $x^2+y^2+Dx+Ey+F=o$ की स्पर्शी की लम्बाई का वर्ग $x_1^2+y_1^2+Dx_1+Ey_1+F$ है।

7.21 वृत कुल : (Families of Circles)

हम देख चुके हैं कि, वृत के मानक समीकरण में तीन आवश्यक अचर होते हैं। इस प्रकार, वृत के निर्धारण के लिए तीन प्रतिबंधों की आवश्यकता होती है। यदि, हम वृत पर दो प्रतिबंध आरोपित करें तो अचरों में से एक अचर अनिर्धारित रहेगा। इस प्रतिबंध को मनमाने ढंग से चयन किया जा सकता है शर्त यह है कि यह प्रतिबंध दो अचरों को निर्धारित करने वाले प्रतिबन्धों का विरोधाभास न करे और उनसे स्वतन्त्र हो। इसलिये हम ऐसी पद्धति पाते हैं जिसमें केवल एक स्वेच्छ अचर का आभास होता है और परिणामस्वरूप, हम वृतों का एक प्राचल कुल प्राप्त करते हैं। इस प्रकार, वृतों का एक **प्राचल कुल** उसी प्रकार प्राप्त होता है जिस प्रकार एक सरल रेखा पर एक प्रतिबन्ध आरोपित करने पर सरल रेखाओं का एक प्राचल कुल प्राप्त होता है।

उपरोक्त अनुच्छेद में, हमने जो कुछ कहा है, उसकी व्याख्या निम्नांकित उदाहरण करेंगे।

उदाहरण 1 : केन्द्र $(-4, 3)$ वाले वृत कुल का समीकरण लिखो।

हल : चूंकि केन्द्र ज्ञात होने का तात्पर्य यह है कि दो प्रतिबंध वृत पर आरोपित किये गये हैं और हम दो अचरों को ज्ञात कर सकते हैं अर्थात् वृत के व्यापक समीकरण $x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$ से h और k ज्ञात कर सकते हैं।

पुन: चूंकि $h=-4$ तथा $k=3$ इसलिये उपरोक्त समीकरण से,

$$x^2+y^2+8x-6y+(25-r^2)=0$$

या, $x^2+y^2+8x-6y+e=0$ जहाँ $e=(25-r^2)$

इस समीकरण में, e एक अनिर्धारित अचर है अर्थात् एक प्राचल है। इस प्रकार एमाहलकप्रच , वृत कुल प्राप्त करते हैं। e के विभिन्न मानों के लिये आकृति 7.28 में इस कुल के कुछ सदस्यों को दिखाया गया है।

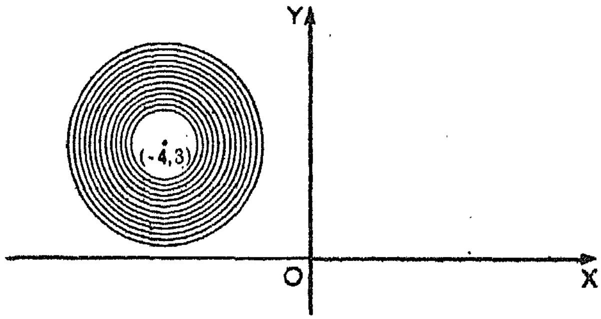
वह वृत कुल, जिसका केन्द्र एक ही होता है परन्तु त्रिज्यायें भिन्न होती हैं, **संकेन्द्री वृत कुल (family of concentric circles)** कहलाता है। उदाहरण 1 का वृत कुल, संकेन्द्री वृत कुल है।

उदाहरण 2 : बिन्दुओं $(-2, 2)$ तथा $(5, 1)$ से गुजरने वाले उस वृत का समीकरण ज्ञात करो, जिसका केन्द्र, रेखा $x+2y+3=0$ पर है।

हल : माना, वृत का केन्द्र (h, k) है। चूंकि, केन्द्र, रेखा $x+2y+3=0$ पर अवस्थित है, इसलिये,

$$h+2k+3=0$$

या, $h=-(2k+3)$



आकृति 7.28

तब, रेखा पर केन्द्र वाले सभी वृतों का कुल निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :

$$x^2+y^2+2(2k+3)\,x-2ky+[(2k+3)^2+k^2-r^2)]=0$$

या, $x^2+y^2+2(2k+3)\,x-2ky+e=0$, जहाँ $e=[(2k+3)^2+k^2-r^2]$ (1)

इस प्रकार, हम द्वि-प्राचल वृत कुल प्राप्त करते हैं क्योंकि, समीकरण में दो स्वेच्छ अचर k तथा e रह गये हैं। अब हमें बाकी दो प्रतिबन्धों अर्थात् वृत बिन्दुओं $(-2, 2)$ तथा $(5, 1)$ से गुजरता है को भी आरोपित करने पर, निम्नांकित दो समीकरण प्राप्त होते हैं :

$$-12k+e=4 \qquad \text{तथा} \qquad 18k+e=-56$$

इस प्रकार, $e=-20$ तथा $k=-2$. इन मानों, को समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर हमें वृत का समीकरण $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ प्राप्त होता है।

दो वृतों के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से होता हुआ वृत कुल (Family of circles through the intersection of two circles)

वृत कुल का एक उपयोगी उदाहरण निम्न प्रकार से मिलता है :

माना, $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ (2)

तथा, $x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ (3)

दो विशिष्ट वृतों के समीकरण हैं। अब निम्नांकित समीकरण पर विचार करो :

$$(x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1)+k(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0 \quad (4)$$

जहाँ k एक स्वेच्छ अचर है। इस समीकरण को निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है :

$$(1+k)x^2+(1+k)y^2+(D_1+D_2k)x+(E_1+E_2k)y+(F_1+F_2k)=0 \quad (5)$$

यह स्पष्ट रूप से एक वृत का समीकरण है, यदि $k\neq -1$.

यदि, $k=-1$ तो समीकरण (5) एक सरल रेखा में परिष्कृत हो जाता है, जिसका समीकरण निम्नांकित है।

$$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$$

किसी भी अवस्था में, यदि दोनों वृतों का प्रतिच्छेद बिन्दु (x_1, y_1) हो तो समीकरण (4) से व्यक्त वक्र इस बिन्दु से होकर जायेगा। यह ऐसा इसलिए है कि, यदि (x_1, y_1) दोनों वृतों के समीकरणों को सन्तुष्ट करता है तो इन निर्देशांकों को समीकरण (4) में प्रतिस्थापित करने पर (4) समीकरण $0+k(0)=0$ को लघुकृत हो जाता है।

हम देखते हैं कि, $k\neq -1$ के लिए समीकरण (4) या (5) एक प्राचल वृत-कुल व्यक्त करता है जिसके सभी सदस्य, दो दिये हुए वृतों के प्रतिच्छेद बिन्दु से, यदि कोई हो, गुजरता है। यदि $k=-1$ तो, समीकरण (4) तथा (5), एक सरलरेखा का समीकरण व्यक्त करते हैं जो दो दी हुई वृतों के प्रतिच्छेद बिन्दु, यदि कोई हो, से गुजरती है।

उदाहरण 3 : दो वृतों,

$$x^2+y^2-8x-2y+7=0$$

$x^2+y^2-4x+10y+8=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु तथा बिन्दु $(-1,-2)$ से गुजरने वाले वृत का समीकरण ज्ञात करो।

हल : दो दिए हुए वृतों के प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाले वृत-कुल का समीकरण $(x^2+y^2-8x-2y+7)+k(x^2+y^2-4x+10y+8)=0$ है।

चूंकि वृत, इस कुल का एक सदस्य है और यह बिन्दु $(-1,-2)$ से गुजरता है, इसलिये इन निर्देशांकों को उपरोक्त समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर, हम देखते हैं कि,

$$24-3k=0, \text{ या } k=8.$$

k के इस मान के लिए अभीष्ट वृत का समीकरण $9x^2+9y^2-40x+78y+71=0$ है।

प्रश्नावली 7.11

1 से 5 तक के प्रत्येक प्रश्न में व्यक्त तथ्यों से वृत्तकुल का समीकरण ज्ञात करो और विशिष्ट सदस्य का भी चयन करो।

1. केन्द्र $(2, -1)$ पर, त्रिज्या 3 का सदस्य
2. केन्द्र $(-4, 2)$ पर, $x-y=2$ को स्पर्श करने वाला सदस्य
3. केन्द्र $(3, -5)$ पर, $(0, -1)$ से गुजरने वाला सदस्य
4. दो वृत्तों, $x^2+y^2-8x-2y+7=0$ तथा $x^2+y^2-4x+10y+8=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरने वाले तथा निम्नांकित अतिरिक्त प्रतिबन्धों को संतुष्ट करने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात को :

   (*i*) जिसका केन्द्र, x-अक्ष पर है,

   (*ii*) जो बिन्दु $(3, -3)$ से गुजरता है

फलन

8.1 भूमिका (Introduction)

गणितीय संरचनाओं के अध्ययन में "फलन" (function) का अधिक महत्त्वपूर्ण स्थान है। अंग्रेजी के शब्द function (फलन) की उत्पत्ति एक लैटिन शब्द से हुई है जिसका अर्थ operation (संक्रिया) है। इस प्रकार, जब हम एक दी हुई धनात्मक वास्तविक संख्या को दुगुना करते हैं तो हमारा, आशय, संख्या x, (माना) पर एक संक्रिया पूर्ण करके एक नयी संख्या $2x$ प्राप्त करने से है। इसी तरह, जब हम एक वास्तविक संख्या x का वर्ग करते हैं तो हमें एक नयी संख्या x^2 प्राप्त होती है। इसलिये, हम फलन को एक क्रियाविधि मान सकते हैं जिसकी सहायता से कुछ दी हुयी संख्याओं के माध्यम से नयी संख्यायें प्राप्त होती हैं।

एक दूसरे उदाहरण पर विचार करें। माना, हम एक शीत संग्रहण कोष्ठ के किसी समय विशेष के तापमान को मापना चाहते हैं, जिसका तापमान 30°C के प्रारम्भिक तापमान से 0°C पर कम हो जाता है। यह सर्व विदित है कि, हम तापमान को एक तापमापी की सहायता से माप सकते हैं। माना हम किसी समय t (मिनटों में) पर तापमान T (सेन्टीग्रेड) पढ़ते हैं। इस प्रकार, जब $t=2$ तो हम T=20°C; $t=4$ पर, T=17°C इत्यादि पढ़ सकते हैं। यह स्पष्ट है कि, हम परिमेय संख्याओं के क्रमित युग्मों का उपयोग कर रहे हैं।

एक और उदाहरण के तौर पर, एक सरल रेखा में गतिशील वस्तु पर विचार करें। यहाँ भी वस्तु की स्थिति का निर्धारण करने के लिए, हम संख्याओं के क्रमित युग्म का उपयोग करते हैं जो दिये हुए समय t पर मूलबिन्दु O से x इकाई दूरी पर स्थित है। भौतिकी में, विश्रामावस्था से प्रारम्भ कर गिरने वाली वस्तु के द्वारा तय की हुयी दूरी का विख्यात सूत्र $s=\frac{1}{2}gt^2$ के रूप में व्यक्त होता है, जहाँ s, सेन्टीमीटरों की वह संख्या है जो वस्तु t सैकण्ड में गिरती है और g, से० मी०/सैकण्ड^2 में गुरुत्वाकर्षण त्वरण है। इन सभी उदाहरणों में, हम संख्याओं के क्रमित युग्मों का उपयोग कर रहे हैं। इस प्रकार, फलन के दुगुना करने के उदाहरण में, क्रमित युग्म $(x, 2x)$; फलन को वर्ग करने में क्रमित युग्म (x, x^2), शीत संग्रहण कोष्ठ के उदाहरण में क्रमित युग्म (t, T) तथा उपरोक्त उदाहरण में क्रमित युग्म (t, s) है। ध्यान रखें कि, इन सभी उदाहरणों में क्रमित युग्म इस प्रकार हैं कि, उनमें से कोई दो भिन्न युग्म एक ही पहली प्रविष्टि को नहीं रख सकता, ऐसी दशा में, हम क्रमित युग्मों के समुच्चय को **फलन** कहते हैं।

परिभाषा 8.1.1 : माना, X तथा Y दो अरिक्त समुच्चय हैं। X से Y पर **फलन** f, जिसे $f: X \to Y$ लिखा जाता है, $X \times Y$ का उप-समुच्चय इस प्रकार है कि f में कोई दो विभिन्न क्रमित युग्मों की पहली प्रविष्टि एक ही नहीं है अर्थात् यदि, $(x, y_1) \in f$ तथा $(x, y_2) \in f$ तो $y_1=y_2$ पुनः, प्रत्येक $x \in X$ के लिए केवल एक $y \in Y$ इस प्रकार है कि $(x, y) \in f$.

फलन f के युग्म (x, y) के पहले अवयवों या पहले नियामकों के समुच्चय को फलन का **प्रांत (domain)** तथा दूसरे नियामकों के समुच्चय को **सहप्रांत (co-rdomain)** या **परिसर (range)** कहते हैं।

चर संख्या x जो प्रान्त में मानों को ग्रहण करता है उसे **स्वतन्त्र चर (independent variable)** तथा y जो परिसर में मानों को ग्रहण करता है उसे **परतन्त्र चर (dependent variable)** कहते हैं। क्रमित युग्म (x, y) में, y, x का **प्रतिबिम्ब (image)** [जिसे $y=f(x)$ लिखा जाता है] तथा x को y का **पूर्व प्रतिबिम्ब (preimage)** कहते हैं।

परिभाषा 8.1.1 से हम देखते हैं कि **X से Y पर फलन f एक संगति है जो X के प्रत्येक अवयव x को Y के एक (ठीक एक) अद्वितीय अवयव y को सम्बद्ध करता है।** यह भी ध्यान रखें कि, प्रत्येक x के लिए, केवल एक y होता है जबकि दिये हुए y के लिए अनेक x हो सकते हैं। उदाहरणस्वरूप, यदि $X = \{1, 2, 3, \ldots\}$ तथा $Y=\{2, 4, 6, \ldots\}$ हो तो फलन $f : X \to Y$, $f(x)=y=2x$, $x \epsilon X$ से इस प्रकार परिभाषित होता है कि प्रत्येक $x \epsilon X$ के लिए ठीक एक $y \epsilon Y$ होता है। जबकि यदि $X=\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ तथा $Y=\{0, 1, 4, 9, \ldots 16, \ldots\}$ हो तो $f : X \to Y$, $f(x) = y = x^2$, $x \epsilon X$. से इस प्रकार परिभाषित होता है कि, प्रत्येक $x \epsilon X$ के लिए ठीक एक $y \epsilon Y$ होता है पर $y \epsilon Y$ के लिए एक से अधिक $x \epsilon X$ हो सकते हैं। उदाहरणार्थ, $y=4 \; \epsilon Y$ के लिए, दो $x \epsilon X$ अर्थात् $x=-2$ तथा $x=2$ इस प्रकार हैं कि $y=f(-2)=f(2)=4$.

वह फलन जो वास्तविक संख्याओं के उपसमुच्चयों पर परिभाषित होते हैं और जिनका मान भी सर्वदा वास्तविक होता है। को **वास्तविक चरफलन या वास्तविक चर का वास्तविक मान फलन कहते हैं।**

उदाहरण 1 : त्रिज्या r वाले वृत्त का क्षेत्रफल A, πr^2 के बराबर होता है। इसको $A=f(r)=\pi r^2$ लिखा जा सकता है। हम कह सकते हैं कि r त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल A, उसकी त्रिज्या का फलन है और उससे अद्वितीय ढंग से निर्धारित होता है।

उदाहरण 2 : माना, P, पृथ्वी के धरातल पर के सभी बिन्दुओं का समुच्चय है और R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। P के प्रत्येक अवयव के लिए R का एक संगत अवयब होता है जिसे बिन्दु का अक्षांश (latitude) कहते हैं। यह भी फलन का एक उदाहरण है।

उदाहरण 3 : हमें ज्ञात है कि, मूलधन की राशि P, ब्याज I, ब्याज की दर r, प्रति इकाई समय तथा समय t, $I=P.r.t.$ से सम्बन्धित हैं। यदि, हम इन चार राशियों में से किन्हीं दो को नियत करें तो हमें शेष दो में से एक, दूसरे के फलन के रूप में, प्राप्त होता है। उदाहरणार्थ, यदि $P=1000$, $r=5\%$ तो $I=50t$. यह ब्याज I को समय t के फलन के रूप में और विलोमतः भी परिभाषित करता है। (क्यों ?)

उदाहरण 4 : हमें यह ज्ञात है कि, डिग्री सेन्टीग्रेड C तथा डिग्री फारेनहाइट F में एक सम्बन्ध है। वह सम्बन्ध $C=\frac{5}{9}(F-32)$ है। यहाँ C, F का फलन है और F, C का फलन है (क्यों ?)।

उदाहरण 5 : किन्हीं निश्चित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत जीवाणुओं की संख्या समय के साथ बढ़ती है। उदाहरणस्वरूप, एक प्रयोग पर विचार करो जिसमें जीवाणुओं की संख्या P को समय T के विरुद्ध निम्नांकित सारणी में दर्शाया गया है :

T	0	1	2	3	4
P	800	1200	1868	2746	2852

प्रत्येक समय T के लिये, P का एक मान है।

तब, जीवाणुओं की संख्या P, T का एक फलन है।

अधिकांश अवस्थाओं में, एक फलन को उदाहरण 4 की भाँति स्पष्ट रूप से एक सूत्र के रूप में व्यक्त करना सम्भव होता है। फिर भी, यह स्थिति सर्वदा सम्भव नहीं है। उदाहरणार्थ निम्नांकित उदाहरण पर विचार करो :

उदाहरण 6 : माना, x एक वास्तविक संख्या है। R (वास्तविक संख्याओं के समुच्चय) से समुच्चय A, जिसमें केवल दो अवयव 0 तथा 1 हैं, पर फलन f को निम्न ढंग से परिभाषित करो :

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ जब } x \text{ परिमेय है}\\ 1, \text{ जब } x \text{ अपरिमेय है।}\end{cases}$$

यहाँ पर, फलन $f: R \to A$ उदाहरण 4 की तरह स्पष्ट रूप में व्यक्त नहीं है।

8.2. वास्तविक फलनों के लेखा चित्र (Graphs of Real Functions)

गणित में लेखाचित्रों की महत्त्वपूर्ण भूमिका है क्योंकि वे बहुत सी समस्याओं का ज्यामितीय चाक्षुषीकरण करते हैं।

जहाँ कहीं भी दिये हुए आंकड़ों के आधार पर एक प्राकृतिक नियम या प्रतिमान ज्ञात करने का प्रयास होता है वहाँ प्रायोगिक कार्यों में सर्वदा लेखा चित्र प्रयुक्त होता है। इस प्रकार के प्रतिमान ज्ञात होने पर, एक प्राकृतिक परि-घटना को कभी-कभी एक गणितीय सूत्र की सहायता से व्यक्त करना सम्भव है। अब, हम कुछ फलनों के लेखाचित्रों की विस्तार में विवेचना करेंगे।

पूर्व कक्षाओं में, हम कुछ फलनों जैसे $y=x^2$ (एक परवलय), $y=x$ (मूल बिन्दु से जाने वाली सरल रेखा) इत्यादि के लेखाचित्रों का अध्ययन कर चुके हैं।

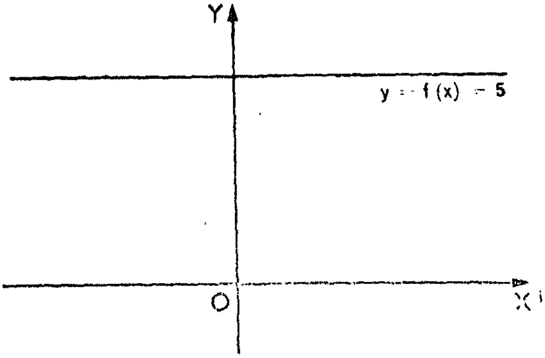
इस परिच्छेद में, हम कुछ महत्त्वपूर्ण फलनों के लेखाचित्रों का अध्ययन करेंगे जिनकाविज्ञान, कला, कृषि, तकनीकी विज्ञान, वाणिज्य शास्त्र तथा औषधि विज्ञान इत्यादि में विस्तृत अनुप्रयोग है। इसके पूर्व हमें देखना है कि लेखाचित्र का अर्थ क्या है ?

परिभाषा 8.2.1 : फलन $f: X \to Y$ का **लेखाचित्र**, बिन्दुओं $(x, f(x))$ का समतल में समुच्चय है, यहाँ x उसी प्रान्त में अवस्थित है जिसमें फलन f परिभाषित है।

इस प्रकार, फलन $y=f(x)=x^2$ का लेखाचित्र, $x-y$ समतल में क्रमित युग्मों (x, x^2) का समुच्चय है जबकि फलन $y=f(x)=x$ का लेखाचित्र, समतल में, क्रमित युग्म (x, x) का समुच्चय है।

उदाहरण 1 : $y=f(x)=5$ का आलेख चित्र बनाओ।

हम देखते हैं कि, फलन f, $(x, 5)$ प्रकार के सभी क्रमित युग्मों का समुच्चय है जहाँ x कोई वास्तविक संख्या है। इस प्रकार, f का प्रान्त, सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय तथा परिसर, एकल समुच्चय {5} है। वे फलन, जिनका परिसर एकल समुच्चय से बना होता है, **अचर फलन (constant function)** कहलाते हैं। इस प्रकार, $f(x)=5$ एक अचर फलन है। इस फलन का लेखाचित्र आकृति 8.1 में दिया गया है।



आकृति 8.1

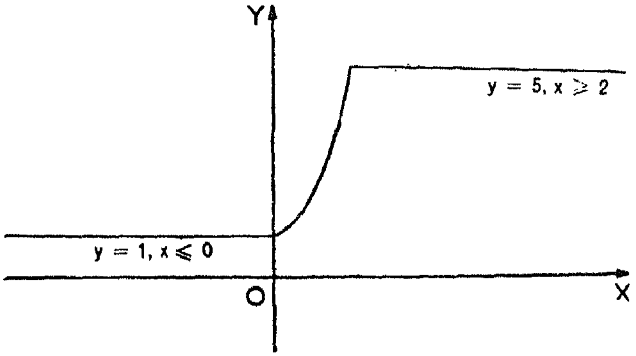
ध्यान रखें कि, एक अचर फलन प्राप्त करने के लिए 5 के स्थान पर हम कोई भी वास्तविक संख्या ले सकते थे।

उदाहरण 2 : क्रमित युग्मों (x, y), जहाँ

$$y=\begin{cases}1 & , \quad x\leqslant 0\\ x^2+1 & , \quad 0<x<2\\ 5 & , \quad x\geqslant 2\end{cases}$$

से बने हुए फलन f का आलेख चित्र बनाओ। ध्यान दें कि, फलन का प्रांत वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

यह भी ध्यान रखें कि, यह फलन तीन भागों में निर्मित होता है। पहला व्यंजक y 1, यदि $x\leqslant 0$, एक अचर फलन है जिसका प्रांत, 0 को सम्मिलित करते हुए सभी ॠणात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। दूसरा व्यंजक $y=x^2+1$ स्पष्टतया, एक परवलय का एक भाग है जिसका प्रांत, उन सभी x का समुच्चय है जिनके लिए $0<x<2$ है। तीसरा व्यंजक, पुनः एक अचर फलन $y=5$ जिसका प्रांत, उन सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है जो 2 के बराबर या 2 से बड़े हैं। फलन का लेखाचित्र आकृति 8·2 में दिखाया गया है।



आकृति 8.2

उदाहरण 3 : फलन $y=f(x)=|x|$ का लेखाचित्र बनाओ।

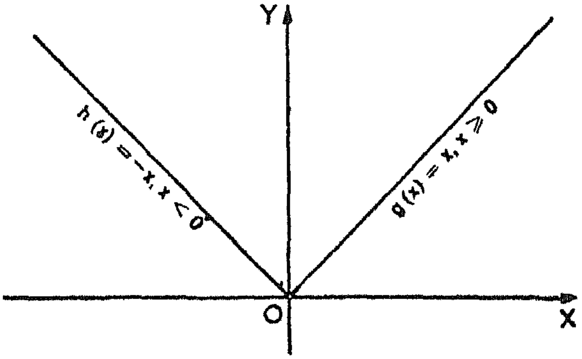
हम जानते हैं कि यह फलन निम्न तरीके से भी लिखा जा सकता है :

$$f(x)=\begin{cases}x, \; x\geqslant 0 & \text{के लिये}\\ -x, \; x<0 & \text{के लिये}\end{cases}$$

फलन का लेखाचित्र, g तथा h से परिभाषित दो भागों में बना हुआ है,

$$g(x)=x, \quad x\geqslant 0 \quad \text{के लिये}$$
$$h(x)=-x, \quad x<0 \quad \text{के लिये}$$

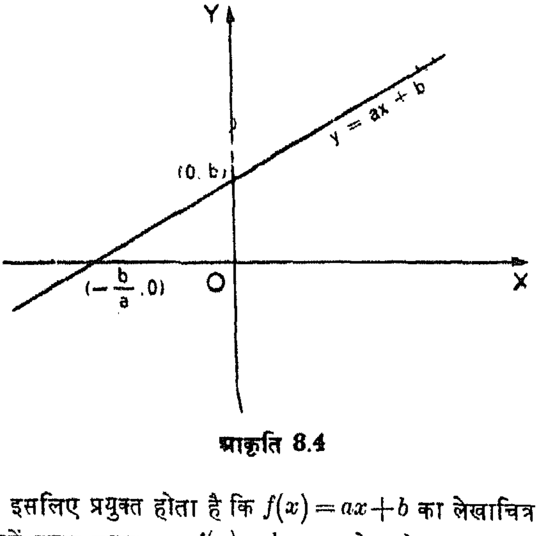
फलन का लेखाचित्र, आकृति 8.3 में दिखाया गया है। इस फलन को **निरपेक्ष मान फलन (absolute value function)** कहते हैं।



आकृति 8.3

उदाहरण 4 : फलन $y = f(x) = ax + b$ का लेखाचित्र बनाओ, जहाँ a तथा b वास्तविक अचर तथा x एक वास्तविक संख्या है।

फलन का लेखाचित्र, वास्तविक संख्याओं के $(x, ax + b)$ प्रकार के सभी क्रमित युग्मों से बना है। लेखाचित्र, आकृति 8.4 में दिखाया गया है। इस फलन को **रैखिक फलन (linear function)** कहते हैं। इसके



आकृति 8.4

नाम के साथ **रैखिक** शब्द इसलिए प्रयुक्त होता है कि $f(x) = ax + b$ का लेखाचित्र एक सरल रेखा है। ध्यान रखें कि, जब $a = 0$ तो हमें अचर फलन $y = f(x) = b$ प्राप्त होता है।

रैखिक फलनों के कुछ उदाहरण दिन प्रतिदिन के जीवन में मिलते हैं :

(i) चिरपरिचित सूत्र $A = P(1 + rt)$, जो P रुपये की t वर्षों के लिए r रुपये प्रति इकाई समय के ब्याज दर पर व्यय की हुई धनराशि के लिए, नियत मूलधन P तथा नियत ब्याज दर r के लिए समय के एक

रैखिक फलन का निर्धारण करता है। वास्तव में, यदि हम दायें पक्ष में किन्हीं दो चरों को नियत करें तो हमें A शेष चरों का रैखिक फलन के रूप में प्राप्त होता है।

(*ii*) एक पिन्ड द्वारा t समय में नियत वेग V_o से तय की हुयी दूरी d

सूत्र $$d = V_o t$$

से प्रदर्शित होती है।

इस प्रकार, दूरी d, निम्नांकित सूत्र से व्यक्त समय t का रैखिक फलन है :

$$d = f(t) = V_o t.$$

(*iii*) भौतिकी में, एक वस्तु को, एक अचर बल (F) के विरुद्ध, दूरी (d) तक गतिशील रखने में, किया गया कार्य (W) सूत्र

$$W = Fd$$

से दिया जाता है। चूँकि F अचर है, इसलिए किया गया कार्य W तय की दूरी का फलन है।

(*iv*) इलैक्ट्रानिक में, प्रतिरोध R तथा धारा I वाले चालक के सिरों के बीच विभव (voltage) V सूत्र

$$V = IR$$

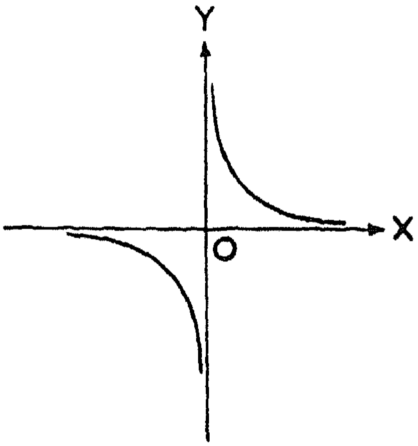
से दी जाती है। अतः नियत R के लिए, अर्थात् $R = R_0$ के लिए, विभव V, धारा का रैखिक फलन है और

$$V(I) = R_o I$$

से व्यक्त होती है।

उदाहरण 5 : $x = 0$ के अतिरिक्त सभी $x \epsilon R$ के लिए परिभाषित फलन $y = f(x) = \frac{1}{x}$ पर विचार करो।

इस फलन का लेखाचित्र $\left(x, \frac{1}{x}\right)$ प्रकार के सभी क्रमित युग्मों से बनता है जहाँ x कोई शून्येत्तर वास्तविक संख्या है। इस फलन का प्रांत, स्पष्टतया, सभी शून्येतर वास्तविक संख्याओं अर्थात् $R - \{0\}$ का समुच्चय तथा परिसर भी $R - \{0\}$ है। इस फलन का मूलभूत गुणधर्म यह है कि यह छोटी (बड़ी) निरपेक्ष मान की संख्याओं को बड़ी (छोटी) निरपेक्ष मान की संख्याओं में परिवर्तित करता है। इस फलन का लेखाचित्र, आकृति 8.5 में दिखाया गया है।



आकृति 8.5

इस फलन का लेखाचित्र **समकोणीय अतिपरवलय (rectangular hyperbola)** कहलाता है।

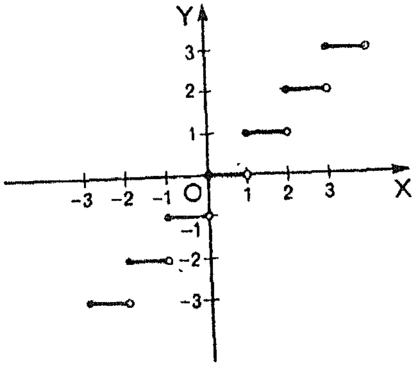
यदि, एक आदर्श गैस के लिए, हम नियत तापमान पर दबाव P तथा आयतन V को सम्बन्धित करने वाला लेखाचित्र खींचे तो हमें उपरोक्त फलन के समरूप ही एक फलन अर्थात् $y=f(x)=\frac{1}{x}$ प्राप्त होता है। फलन को $P=\frac{C}{V}$ से व्यक्त किया जाता है, जहाँ पर C एक अचर है। ध्यान रखें कि, इसका लेखाचित्र केवल पहले चतुर्थांश में ही परिभाषित है।

उदाहरण 6 : फलन $y=f(x)=[x]$ जहाँ x एक वास्तविक संख्या है, के लेखाचित्र पर विचार करो।

प्रतीक $[x]$ का आशय x के बराबर या उससे कम महत्तम पूर्णांक से है। इस प्रकार, $[2.37]=[2]$, $[4.1]=4$, $[-3.37]=-4$ तथा $[0.99]=0$. इस फलन का लेखाचित्र $(x, [x])$ प्रकार के सभी क्रमित युग्मों से बनता है। $[x]$ की परिभाषा से, हम देखते हैं कि,

$-1 \leqslant x < 0$ के लिये, $[x]=-1$
$0 \leqslant x < 1$ के लिये, $[x]=0$
$1 \leqslant x < 2$ के लिये, $[x]=1$
$2 \leqslant x < 3$ के लिये, $[x]=2$, इत्यादि।

फलन का लेखाचित्र, आकृति 8.6 में खींचा गया है।



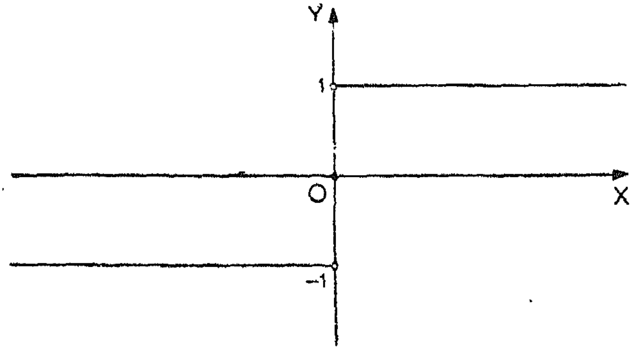
आकृति 8.6

ध्यान रखें कि, काली बिन्दियों से अन्तर्विष्ट बिन्दुओं को तथा वृत्तों से त्याज्य बिन्दुओं को दिखाया गया है। इस फलन को **महत्तम पूर्णांक फलन (greatest integer function)** कहते हैं। इस फलन को **एकक पग फलन (unit step function)** भी कहते हैं। एकक पग नाम देने के पीछे सत्यता यह है कि, यह मात्रक आकार के पगों को ग्रहण करता है। ये फलन, फलनों के व्यापक संवर्ग, **पग फलन (step functions)** की विशेष दशायें हैं। इस प्रकार के फलन हमारे दिन-प्रतिदिन के जीवन में प्रायः मिलते हैं। उदाहरणार्थ (1) x ग्राम भार के पत्र पर y पैसे का डाक टिकट, (2) दिल्ली से बाम्बे के लिए x मिनट तक के ट्रंक काल का शुल्क y रुपये, (3) दो या दो से अधिक विभिन्न धातुओं से बने और सिरे से सिरे जुड़े हुए मिश्र धातु छड़ के एक सिरे से x से० मी० की दूरी पर ऊष्मा चालकता।

उदाहरण 7 : निम्नांकित फलन पर विचार करो :

$$y=f(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \text{ के लिये} \\ 0, & x=0 \text{ के लिये} \\ -1, & x<0 \text{ के लिये} \end{cases}$$

इस फलन को **चिन्ह फलन (Signum function)** कहते हैं और **sgn** x से प्रदर्शित करते हैं। इस फलन का, गणित, भौतिकी तथा वैद्युत यांत्रिकी के कई विभागों में प्रयोग होता है। इस फलन का लेखा-चित्र, आकृति 8.7 में दिखाया गया है।



आकृति 8·7

ध्यान रखें कि, $sgn\ x$ तथा $|x|$ में घनिष्ठ सम्बन्ध है। संयुक्त फलन के अध्ययन में, हम लोग देखेंगें कि,

$$sgn\ x=\frac{|x|}{x}, \quad x\neq 0$$

8·3 बहुपद फलन (Polynomial Functions)

पूर्व अध्ययन में, हमने $ax+b$, ax^2+bx+c, x^3 इत्यादि प्रकार के फलनों पर विचार किया है। वे क्रमश: रेखिक फलन, द्विघात फलन तथा घन फलन के उदाहरण हैं। ये फलन, फलनों के व्यापक संवर्ग **बहुपद फलन** की विशिष्ट दशायें हैं।

परिभाषा 8·3·1 : P के प्रान्त में सभी x के लिए परिभाषित फलन

$$P(x)=a_0+a_1 x+ax^2+\cdots\cdots+a_n x^n,\ a_n\neq 0,$$

जहाँ $a_0, a_1 \cdots\cdots, an$ वास्तविक संख्याएँ हैं तथा n एक स्वेच्छ धनात्मक पूर्णांक हैं, को n घात का **बहुपद फलन** कहते हैं।

इस प्रकार, रेखिक फलन, घात 1 का बहुपद, द्विघात, फलन घात 2 का बहुपद तथा घन फलन, घात 3 का फलन है इत्यादि। अचर फलन, घात 0 का बहुपद है।

फलन $f(x) = \sqrt{x}$ $(x>0)$के बारे में आपके क्या विचार हैं ? क्या यह एक बहुपद फलन है ? नहीं, यह बहुपद फलन नहीं हैं (क्यों ?)

इसके पूर्व हम रेखिक तथा द्विघात फलनों की महत्ता देख चुके हैं। इस प्रकार बहुपद फलनों के अध्ययन की अपने आप में बहुत ही महत्ता है।

8·4 परिमेय फलन (Rational Functions)

दो बहुपद फलनों के विभाजन से फलनों का एक अन्य महत्त्वपूर्ण संवर्ग प्राप्त होता है जिसे **परिमेय फलन** कहते हैं ।

परिभाषा : 8·4.1 : निम्न प्रकार से परिभाषित फलन R,

$$R\ (x)=\frac{P\ (x)}{Q\ (x)}$$

जहाँ P (x) तथा Q (x) $(\neq 0)$ बहुपद फलन है, **परिमेय फलन** कहलाता है । यह x के उन्हीं मानों के लिए परिभाषित है, जिनके लिए Q (x) $\neq 0$

$\frac{1}{x}$, $\frac{3\ x+1}{6\ x^2-4\ x-1}$, $2x^2+2x-1$, परिमेय फलनों के उदाहरण हैं । ध्यान रखें कि $2x^2+2x-1$ को $\frac{2x^2+2x-1}{1}=\frac{P\ (x)}{Q\ (x)}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है । अतः यह परिमेय फलन है । व्यापक रूप में, यह दिखाया जा सकता है कि, प्रत्येक बहुपद फलन एक परिमेय फलन है ।

पूर्व उदाहरणों में, तुमने कुछ ऐसे फलनों को देखा है जिनके लिए $f(x)=f(-x)$ तथा $f(-x)=-f(x)$ सत्य है । उदाहरणस्वरूप अनुच्छेद 8.2 के उदाहरण 1 तथा 3 के फलन इस प्रकार हैं कि $f(x)=f(-x)$ तथा उदाहरण 5 तथा 7 के फलनों के लिए $f(-x)=-f(x)$ सत्य है । हम, उनको विशेष नाम से पुकारते हैं । जिन फलनों के लिए, $f(x)=f(-x)$, सभी x के मानो के लिए सत्य है, उनको **सम फलन (even functions)** तथा जिनके लिए $f(-x)=-f(x)$ सत्य है, उनको **विषम फलन (odd functions)** कहते हैं ।

ध्यान रखें कि, $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ सर्वदा समफलन तथा $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ सर्वदा विषम फलन होता है (क्यों ?) । चूंकि $f(x)$ को $f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ से निरूपित किया जा सकता है, इसलिए प्रत्येक फलन $f(x)$ को, $f(x)$ तथा $f(-x)$ के परिभाषित होने की स्थिति में, सम तथा विषम फलनों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है । यह भी संभव है कि, फलन न तो सम हो और न विषम । उदाहरणस्वरूप, $f(x)=x^2+x$ न तो सम है और न विषम ।

प्रश्नावली 8.1

नीचे दिए हुए प्रत्येक सम्बन्धों में बताओ वे फलन हैं या नहीं, यदि नहीं तो क्यों ? जब वे फलन हों तो उनके प्रांत तथा परिसर ज्ञात करो :

1. $y=\frac{x^2-1}{x-1}$, $x\neq 1$
2. $y=\pm\sqrt{4-x^2}$, $x\leqslant 2$
3. $y=\sqrt{x}$
4. $y=x^3$

5. $|x|+y=0$

6. $y=\frac{3-x}{x-3}, x\neq 3$

निम्नांकित फलनों में से, प्रत्येक फलन का लेखाचित्र खींचों। तथा उनमें से सम या विषम, फलनों का उल्लेख कीजिए :

7. $y=sgn(x-2)$

8. $y=|x-2|$

9. $y=[x]-x$

10. $y=\begin{cases} x, \text{ यदि } x\leqslant 0 \\ x^2 \text{ यदि } 0<x\leqslant 2 \\ x, \text{ यदि } 2<x \end{cases}$

11. $y=f(x)=\begin{cases} x, \text{ यदि, } x \text{ सम है} \\ 0, \text{ यदि, } x, \text{ विषम है} \end{cases}$, x एक पूर्णांक है।

8.5 फलनों का इतिहास (History of Functions)

बीजगणित तथा ज्यामिति या उसी तरह के किसी गणितीय धारणा के ही समान, फलनों की संकल्पना भी उल्लेखनीय विकास के दौर से गुजरी है।

अपनी धारणाओं को व्यापक और विस्तृत बनाने की, गणितज्ञों की सामान्य प्रवृत्ति रही है। जैसा कि माना जाता है, 'फलन' (function) शब्द को सर्वप्रथम आर० डेकार्ट (R. Descarte) [1596-1650] ने 1637 में प्रस्तुत किया, जिसने इस पद का प्रयोग केवल चर x के किसी धनात्मक पूर्णांक घात x^n के अर्थ में किया। 17वीं शताब्दी में, फलन की सबसे स्पष्ट परिभाषा, जेम्स ग्रेगरी (James Grégory) [1638-1675] ने 1667 में अपनी पुस्तक Vera Circuliet Hyperbolae Quadraturia में दिया। उसने फलन को एक ऐसी राशि के रूप में परिभाषित किया, जो दूसरी राशियों से बीजीय संक्रियाओं या किसी दूसरी कल्पनीय संक्रियाओं के अनुक्रमण से प्राप्त होती है। कदाचित् इसके बाद जी० डब्लू० लेबनीज (G. W. Leibnitz) [1646-1716] ने अपनी 1673 की पांडुलिपि में फलन (function) शब्द को वक्र के एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु पर परिवर्तित होने वाली राशि के अर्थ में प्रयुक्त किया जैसे वक्र पर के एक बिन्दु के नियामक, वक्र की प्रवणता, स्पर्शी, अभिलम्ब तथा कोटि की लम्बाई। फिर 1714 में, अपनी Historia में, लेवनीज ने 'फलन' (function) शब्द को उस राशि के अर्थ में प्रयुक्त किया जो किसी चर पर निर्भर करती है। वाक्य खण्ड 'x का फलन' (function of x) का प्रयोग करने वाला, वह पहला व्यक्ति था। एल० आइलर (L. Euler) [1707-1783] ने फलन को चरों एवं अचरों से युक्त किसी समीकरण या सूत्र के रूप में माना। फलन की आइलर की धारणा जोसेफ फोरियर (Joseph Fourier) [1768-1830] के समय तक प्रयुक्त होती रही, जिसने उष्मा-प्रवाह की जाँच के दौरान फलन की एक परिभाषा दी जो इस प्रकार के सम्बन्धों को अन्तर्निहित करने के लिए काफी विस्तृत थी। अन्त में, ली० डिरचेलेट (Lejeunne Dirichlet) [1805-1859] ने फलन की एक परिभाषा दी जिसका प्रयोग आजकल होता है। समुच्चय सिद्धांत के आविष्कार के बाद, फलन की समुच्चय सिद्धान्त वाली परिभाषा बाद में जार्ज कैण्टर (George Cantor) [1845-1918] ने दिया।

संकेत पद्धति के रूप में, जान वारनाली ने x के व्यापक फलन के लिए X या ξ लिखा, जिसे उसने 1718 में ϕx से परिवर्तित किया। लेवनीज ने x के फलनों के लिये, x^1, x^2 प्रयुक्त किया, जिसमें मूर्धाक्षर तभी प्रयुक्त किये जाते हैं जबकि अनेक फलन हों। संकेत पद्धति $f(x)$ को आइलर ने 1734 में प्रस्तुत किया।

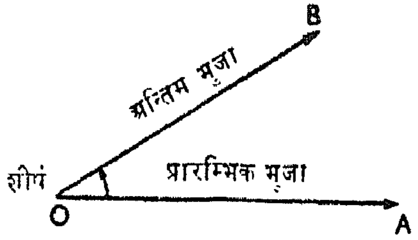
त्रिकोणमिति

9.1 भूमिका (Introduction)

"Trigonometry (त्रिकोणमिति)" शब्द की उत्पत्ति ग्रीक शब्दों trigonon तथा metron के संयोग से हुयी है, जिसका अर्थ "three angle measure (त्रिकोणमाप)" है। प्राचीन काल में त्रिकोणमिति का प्रयोग त्रिभुज की भुजाओं एवं कोणों से सम्बन्धित प्रश्नों को हल करने में किया जाता था। लगभग 300 वर्ष पहले, यह गणित के पाठ्यक्रम में सम्मिलित किया गया। इसका अध्ययन, समुद्री कप्तान, नौसंचालन में; सर्वेक्षक, नवीन भू-भागों का नक्शा बनाने में तथा अभियंता एवं दूसरे अपने कार्यों में करते थे। परन्तु आज त्रिकोणमिति के प्रयोग का क्षेत्र बहुत विस्तृत हो गया है। वर्तमान समय में, त्रिकोणमिति (या ज्यादा यथार्थ वृत्तीय फलन) का प्रयोग बहुत से क्षेत्रों जैसे भूकंप विज्ञान, वैद्युत परिपथों की अभिकल्पना, परमाणु की अवस्था का वर्णन, समुद्र में ज्वार-भाटों की ऊँचाई के पूर्वानुमान, संगीतमय स्वर के विश्लेषण, तथा सूर्य-कलंकों की उपस्थिति के अध्ययन में होता है। वृतीय फलनों के प्रयोग से स्टाक मार्केट के उतार-चढ़ाव की भविष्यवाणी करने का प्रयास चल रहा है।

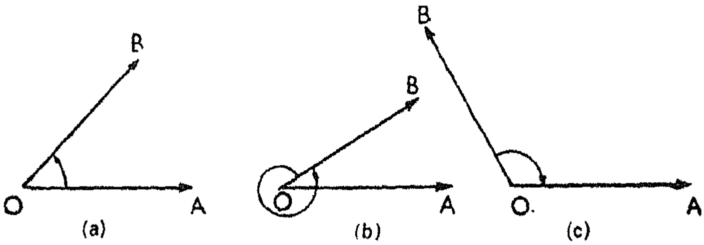
9.2 मौलिक धारणा (Basic Concepts)

पूर्व कक्षाओं में, हम एक कोण, उसकी प्रारम्भिक भुजा, अन्तिम भुजा तथा शीर्ष के बारे में अध्ययन कर चुके हैं (आकृति 9·1 देखें)।



आकृति 9.1

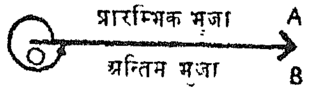
मह धनात्मक तथा ऋणात्मक कोणों से भी परिचित हैं । आकृति 9.2 (a) तथा (b) में धनात्मक कोण तथा (c) में ऋणात्मक कोण दिखाये गये हैं ।



आकृति 9.2

मापन का एकक (Units of Measurement)

कोणों की माप के लिए अनेक एकक हैं । एक एकक का सुझाव हमें कोण की परिभाषा से मिलता है । आकृति 9.3 में दिखाये गये भांति, प्रारम्भिक भुजा की स्थिति से एक पूर्ण परिक्रमण, एक एकक है । यह साधारणतया बड़े कोणों के लिए सुविधाजनक है । उदाहरणार्थ, द्रुत गति से चलने वाले चरखे के लिए, एक सैकण्ड



आकृति 9.3

में निर्मित कोण बहुत ही उपयोगी है । इस प्रकार, एक अभियंता, 900 परिक्रमण प्रति मिनट की दर से घूमने वाले चक्र के बारे में जानकारी दे सकता है । हम दो अन्य पद्धतियों का वर्णन करेंगे, जिनका सबसे ज्यादा प्रयोग होता है ।

छोटे कोणों के लिए, मुख्यतया जब एक परिक्रमण से कम के कोणों को नापना हो तो एक परिक्रमण का कुछ हिस्सा ज्यादा सुविधाजनक होता है । ऐसे कार्यों के लिए, प्रायः **षाष्टिक पद्धति (sexagesimal system)** का प्रयोग होता है ।

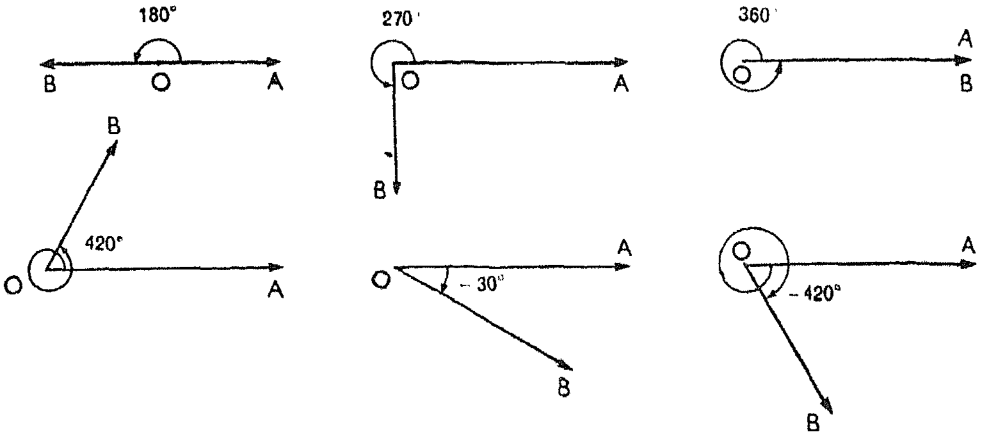
षाष्टिक पद्धति (Sexagesimal System)

यदि प्रारम्भिक भुजा से अन्तिम भुजा तक का एक घूर्णन, एक परिक्रमण का $\frac{1}{360}$ वां भाग होता है तो उस कोण को **एक अंश (one degree)** माप का कोण कहते हैं और उसे 1° लिखा जाता है । एक अंश को मिनटों में तथा एक मिनट को सैकण्डों में बाँटते हैं । एक अंश का साठवां भाग **मिनट** कहलाता है और $1'$ से व्यक्त होता है तथा एक मिनट के सांठवें भाग को **सैकण्ड** कहते हैं और $1''$ से व्यक्त करते हैं । इस प्रकार,

$$60'' = 1'$$

$$60' = 1^\circ$$

कुछ 180°, 270°, 360°, 420°, − 30°, − 420° मापों के कोण आकृति 9.4 में दिखाये गये हैं।

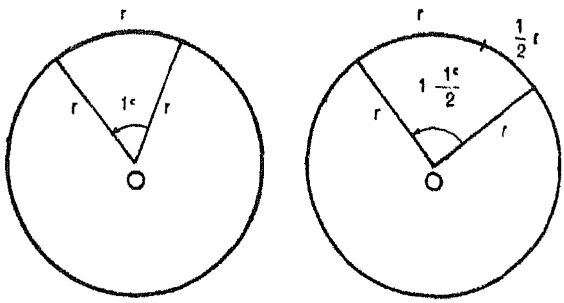


आकृति 9.4

षाष्टिक पद्धति का प्रयोग, अभियांत्रिकी, ज्योतिषशास्त्र, नौसंचालन, तथा सर्वेक्षण में विस्तृत रूप में होता है।

रेडियन माप (Radian Measure)

कोणीय माप का एक दूसरा एकक, जिसे रेडियन माप कहते हैं, उच्च गणित तथा उसके अनुप्रयोगों में एक विशिष्ट महत्त्व रखता है। इस पद्धति में, मापन का एकक एक रेडियन है **उस धनात्मक कोण को, जिसका शीर्ष वृत्त के केन्द्र पर होता है और जो उसी वृत्त की त्रिज्या के बराबर चाप द्वारा अंतरित होता है, 1 रेडियन माप का कोण कहते हैं और 1^c से व्यक्त करते हैं।** आकृति 9.5 में क्रमशः 1 रेडियन तथा $1\frac{1}{2}$ रेडियन माप के कोण दिखाये गये हैं।



आकृति 9.5

हम जानते हैं कि, r त्रिज्या के एक वृत्त की परिधि s, $2\pi r$ होती है। इसका आशय यह है कि, किसी वृत्त के लिए एक त्रिज्या की लम्बाई, परिधि पर 2π गुना नापी जा सकती है। दूसरे शब्दों में, एक वृत्त की परिधि, (चाहे उसकी त्रिज्या कुछ भी हो), वृत्त के केन्द्र पर 2π रेडियन का एक कोण बनाती है।

यह सर्वविदित है कि, किसी वृत्त के बराबर चाप, केन्द्र पर, बराबर कोण बनाते हैं। चूँकि r लम्बाई का एक चाप, एक रेडियन माप का कोण बनाता है, इसलिये l लम्बाई का चाप एक ऐसा कोण बनायेगा जिसका माप $\frac{l}{r}$ रेडियन होगा। इस प्रकार, यदि r त्रिज्या के वृत्त में, एक l लम्बाई का चाप केन्द्र पर θ^c कोण बनाये तो हम देखते हैं कि,

$$\theta^c = \frac{l}{r}$$

एक कोण तथा इसका माप, स्पष्टतया दो भिन्न पक्ष हैं। फिर भी भाषा-दोष के कारण, प्रायः "कोण" तथा "कोण का माप" एक दूसरे के लिये प्रयुक्त होते हैं। उदाहरणार्थ, यदि θ, 30° माप के कोण के लिए प्रयुक्त हो तो हम $\theta = 30^\circ$ लिखते हैं जबकि वास्तव में कोण का माप 30° के बराबर है।

अंश एवं रेडियन में सम्बन्ध (Relation Between Degrees and Radians)

चूँकि वृत्त की परिधि केन्द्र पर एक ऐसे कोण का निर्माण करती है जिसका माप रेडियन में 2π एकक तथा अंशों में 360° एकक है, इसलिये,

$$2\pi \text{ रेडियन} = 360^\circ$$

या

$$\pi \text{ रेडियन} = 180^\circ$$

उपरोक्त सम्बन्ध की सहायता से, हम रेडियन को अंशों के पदों में तथा अंशों को रेडियनों के पदों में व्यक्त करने में समर्थ होते हैं। इस प्रकार π का लगभग मान $\frac{22}{7}$ लेने पर हम देखते हैं कि,

$$1 \text{ रेडियन} = \frac{180}{\pi} = 57^\circ\ 16' \text{ लगभग}$$

तथा

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ रेडियन}$$

$$= 0.01746 \text{ रेडियन लगभग}$$

उदाहरण 1 : उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करो, जिसमें 45° का एक केन्द्रीय कोण 187 से० मी० चाप काटता है। ($\pi \cong \frac{22}{7}$ का प्रयोग करो)*

हल : यहाँ $l = 187$ से०मी०, $\theta = \frac{45\pi}{180}$

अतः $r = \frac{l}{\theta}$ से

$$r = 187 \times \frac{4}{\pi} \text{ से० मी०} = 238 \text{ से० मी०}$$

उदाहरण 2 : एक घड़ी की बड़ी सुई 1.5 से०मी० लम्बी है। 50 मिनट में इसका टिप कितनी दूर चला जायेगा ?

---

* चिन्ह $\cong$ का आशय "लगभग बराबर" से है।

हल : 50 मिनट में, घड़ी की बड़ी सुई एक परिक्रमण का $\frac{5}{6}$ वां भाग या $\frac{5\pi}{3}$ रेडियन घूमती है ।

अतः अभीष्ट तय की हुयी दूरी

$$l = r\theta$$

$$= 1.5 \times \frac{5\pi}{3} \text{ से० मी०} = \frac{5}{2}\pi \text{ से०मी०}$$

$$= 5 \times \frac{3.142}{2} \text{ से० मी०} \quad (\pi \cong 3.142 \text{ के प्रयोग से})$$

$$= 7.855 \text{ से० मी०}$$

निम्नांकित सारणी में, कुछ सामान्य कोणों के रेडियन माप दिये हुए हैं :

अंश	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
रेडियन	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

ध्यान रखें कि, जब एक कोण को रेडियन में व्यक्त किया जाता है तो 'रेडियन' शब्द को प्रायः छोड़ दिया जाता है । इस प्रकार, $\pi = 180°$ तथा $\frac{\pi}{4} = 45°$ इस विचार से लिखे जाते हैं कि इन समीकरणों में बायें सदस्यों के माप का एकक रेडियन है ।

प्रश्नावली 9.1

1. 40 से० मी० व्यास के वृत्त में, एक जीवा की लम्बाई 20 से० मी० है । जीवा के लघु चाप की लम्बाई ज्ञात करो ।
2. एक चक्र एक मिनट में, 360 परिक्रमण करता है । एक सैकण्ड में यह कितने रेडियन घूम जायेगा ?
3. 200 से० मी० व्यास के एक वृत्त के केन्द्र पर 22 से० मी० चाप द्वारा निर्मित कोण को अंशों में ज्ञात करो । ($\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग करो) ।
4. यदि दो वृत्तों में, एक ही लम्बाई के दो चाप केन्द्र पर 60° तथा 75° के कोण बनायें तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात करो ।
5. वह कोण ज्ञात करो जिससे एक ऐसा लोलक दोलन करता है जिसकी लम्बाई 75 से० मी० है और सिरा (a) 10 से० मी० (b) 15 से० मी० (c) 19 से० मी० का चाप वर्णित करता है ।

9.3 वृत्तीय फलन (Circular Functions)

पूर्व कक्षाओं में, हमने एक कोण की ज्या, कोटिज्या इत्यादि को एक समकोण त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाइयों के अनुपात के रूप में व्यक्त किया है । फिर भी, ये परिभाषायें केवल न्यून कोणों तक ही सीमित थीं ।

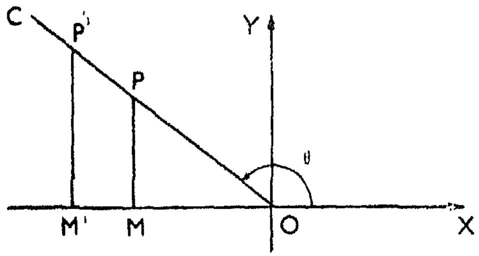
इन परिभाषाओं को किसी भी कोण के विस्तृत किया जा सकता है।

माना, θ, चित्र 9.6 में दिखाया गया कोण XOC तथा P (x,y) इसकी अन्तिम भुजा OC पर, O से भिन्न, कोई बिन्दु है। माना OP की लम्बाई r से प्रदर्शित की गयी है। समरूप त्रिभुजों के प्रयोग से, हम निम्नांकित प्रमेय सिद्ध कर सकते हैं :

प्रमेय : *9.3.1* : अनुपात $\frac{x}{r}$ तथा $\frac{y}{r}$, अन्तिम भुजा पर बिन्दु P की स्थिति से स्वतन्त्र है।

उपपत्ति: हम केवल $\frac{x}{r}$ अनुपात के लिए ही सिद्ध करेंगे। $\frac{y}{r}$ की उपपत्ति उसी के समान है और पाठकों के लिये छोड़ दी गयी है।

स्थिति (i) हम सर्वप्रथम उस स्थिति पर विचार करते हैं जिसमें कोण की अन्तिम भुजा, निर्देशांक अक्षों में से एक से संपाती नहीं है।



आकृति 9.6

आकृति 9·6 में, माना, रेखा OC पर, मूल बिन्दु से अलग दो बिन्दु P (x,y) तथा P′ (x',y') हैं। x-अक्ष पर दो लम्ब PM तथा P′ M′ खींचने पर हम समरूप त्रिभुज OPM, OP′M′ प्राप्त करते हैं। OM, OM′ की लम्बाईयां क्रमशः $|x|$, $|x'|$ तथा OP, OP′ की r, r' है। समरूप त्रिभुजों OPM, OP′ M′ से हम देखते हैं कि,

$$\frac{OM}{OP}=\frac{OM'}{OP'}$$

अर्थात् $|x|/r=|x'|/r'$ (संगत भुजाओं के अनुपात बराबर होते हैं)। इस प्रकार अनुपात $\frac{x}{r}$ तथा $\frac{x'}{r'}$ कांतिमान में बराबर हैं। पुनः चूँकि P तथा P′ एक ही चतुर्थांश में अवस्थित हैं, इसलिए, x तथा x' एक ही चिन्ह के हैं। अतः

$$\frac{x}{r}=\frac{x'}{r'}$$

स्थिति (ii) यह वह स्थिति है, जिसमें अन्तिम भुजा, निर्देशांक अक्षों में से एक के सम्पाती है। यह पाठकों के लिये, अभ्यास स्वरूप छोड़ दी गयी है।

$\frac{x}{r}$ को कोण θ की **कोटिज्या** (cosine) [तथा इसे $\cos\theta$ लिखते हैं] तथा $\frac{y}{r}$ को कोण θ की ज्या (sine) [तथा इसे $\sin\theta$ लिखते हैं] पुनः

कोण θ का **tangent** $=\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{y}{x}$,

कोण θ का **cosecant** $= \text{cosec}\ \theta = \frac{1}{\sin\ \theta} = \frac{r}{y}$,

कोण θ का **secant** $= \sec\ \theta = \frac{1}{\cos\ \theta} = \frac{r}{x}$.

कोण θ का **cotangent** $= \cot\ \theta = \frac{\cos\ \theta}{\sin\ \theta} = \frac{x}{y}$.

यह देखा जा सकता है कि प्रत्येक कोण θ के लिए निम्न सत्य है

$$\sin\ \theta = \sin\ (\theta + 360^\circ)$$
$$\cos\ \theta = \cos\ (\theta + 360^\circ)$$
$$\tan\ \theta = \tan\ (\theta + 360^\circ)$$

हम कहते हैं कि sine तथा cosine फलन, आवर्ती फलन हैं तथा प्रत्येक का आवर्त्त काल 360° [या 2π रेडियन (radian)] है तथा स्पर्शी फलन (tangent finction) आवर्त्ती फलन है तथा इसका आवर्त्त काल 180° (या π रेडियन) है।

वृत्तीय फलन की आवर्तित का एक महत्त्वपूर्ण परिणाम निम्नांकित है :

$$\cos 380 = \cos\ (360^\circ + 20^\circ) = \cos 20^\circ$$

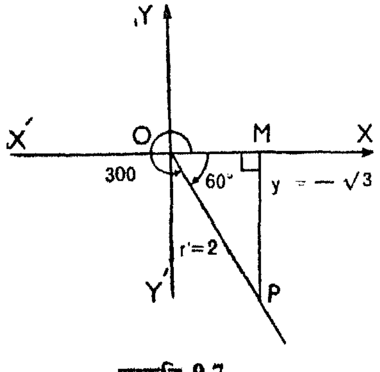
$$\cot\ \frac{13\pi}{3} = \cot\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cot\ \frac{\pi}{3}$$

संकेत पद्धति की एक परिपाटी (A convention About Notation)

एक कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों को ऊपर परिभाषित किया गया है। चूँकि कोणों को या ता रेडियन में या अंशों में नापा जाता है, इसलिये, हम इस प्रथा को अपनाते हैं कि $\cos\ \alpha^\circ$ लिखने का आशय, कोण की उस कोटिज्या से है जिसका अंशों में माप α है (इसी प्रकार, दूसरे अनुपातों के लिये भी) और जब कभी हम $\cos\ \beta$ लिखते हैं उसका तात्पर्य उस कोण की कोटिज्या से है जिसका माप रेडियन में β है। (इसी प्रकार, दूसरे त्रिकोणमितीय अनुपातों के लिए)। यदि, इस प्रकार की कोई परिपाटी न हो तो प्रसंग से यह स्पष्ट होना चाहिए कि दिये हुये कोण के लिए कौन सा माप प्रयुक्त हुआ है।

उदाहरण 1 : 300° के कोण के लिए वृत्तीय फलनों का मान ज्ञात करो।

हल : 300° के कोण की अन्तिम भुजा चौथे चतुर्थांश में है और धनात्मक x-अक्ष से 60° का कोण बनाती है (आकृति 9·7 देखें)।



आकृति 9.7

हम देखते हैं कि,

$$\sin 300^\circ = \sin (300^\circ - 360^\circ) = \sin (-60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

तथा $$\cos 300^\circ = \cos (300^\circ - 360^\circ) = \cos (-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

यह ऐसा इसलिये है कि, ज्या तथा कोटिज्या फलनों का आवर्तकाल 360° है, इस प्रकार, $\sin \theta$ तथा $\cos \theta$ में, हम या तो θ° से 360° घटाते हैं या θ° में 360° जोड़ते हैं। ऐसा करने से उनके मानों में कोई अन्तर नहीं आता। $\sin 300^\circ$ तथा $\cos 300^\circ$ के मानों से, हम देखते हैं कि,

$$\operatorname{cosec} 300^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \sec 300^\circ = 2$$

$$\tan 300^\circ = -\sqrt{3}, \quad \cot 300^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

9.4 त्रिकोणमितीय सर्वसमिकायें (Trigonometric Identities)

इस परिच्छेद में हम त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं अर्थात् वृत्तीय फलनों के उन सम्बन्धों का अध्ययन करेंगे जो दिये हुए कोणों के सभी मानों के लिए सत्य है बशर्ते इन कोणों के लिये, सम्बन्धों के सभी व्यंजक परिभाषित हों। इस प्रकार की सर्वसमिकायें, अनेक क्षेत्रों में बहुत ही उपयोगी हैं जैसे मुख्य रूप से भौतिकी एवं अभियांत्रिकी में।

वृत्तीय फलनों से सम्बन्धित एक मौलिक तादात्म्य निम्नाँकित है।

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

इस सर्वसमिका से, हम निम्नांकित सर्वसमिकाओं को आसानी से प्राप्त कर सकते हैं :

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \quad \text{तथा} \quad 1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta.$$

उदाहरण 1 : सिद्ध करो कि, $$\frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \theta - 1} + \frac{\operatorname{cosec}^2 \theta}{\sec^2 \theta - \operatorname{cosec}^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}$$

हल : हम देखते हैं कि,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \theta - 1} + \frac{\operatorname{cosec}^2 \theta}{\sec^2 \theta - \operatorname{cosec}^2 \theta}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}}{\dfrac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - 1} + \frac{\dfrac{1}{\sin^2 \theta}}{\dfrac{1}{\cos^2 \theta} - \dfrac{1}{\sin^2 \theta}}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}$$

= दायां पक्ष

ध्यान रखें कि, हम बायें पक्ष से प्रारम्भ करके दांयें पक्ष को प्राप्त करते हैं। कोई बायें पक्ष के स्थान पर दायें पक्ष से निम्न प्रकार से प्रारम्भ कर सकता था :

$$\text{दायां पक्ष} = \frac{1}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$$

पहले व्यंजक के अंश तथा हर को $\cos^2\theta$ तथा दूसरे को $\sin^2\theta\cos^2\theta$ से विभक्त करने पर हम देखते हैं कि,

$$\text{दायां पक्ष} = \frac{\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - 1} + \frac{\dfrac{1}{\sin^2\theta}}{\dfrac{1}{\cos^2\theta} - \dfrac{1}{\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta - 1} + \frac{\operatorname{cosec}^2\theta}{\sec^2\theta - \operatorname{cosec}^2\theta}$$

$$= \text{बायां पक्ष}$$

(सर्वसमिकाओं को किसी पक्ष से प्रारम्भ करके सिद्ध करना पाठकों के लिये एक सूक्ष्म अभ्यास स्वरूप है, यद्यपि ऐसा करना कोई आवश्यक नहीं है)।

यह भी ध्यान रखें कि, उपरोक्त सर्वसमिका $\tan\theta = \pm 1$ तथा θ के उन मान के लिए सत्य नहां है जिनके लिए सम्बन्धित वृत्तीय फलन परिभाषित नहीं हैं। ये मान क्या है ?

उदाहरण 2 : सिद्ध करो कि,

$$(\sec\theta - \tan\theta)^2 = \frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}$$

हल : दाँये पक्ष पर विचार करो। इसके अंश तथा हर को $(1 - \sin\theta)$ से गुणा करने पर, हम देखते हैं कि,

$$\text{दायां पक्ष} = \frac{(1 - \sin\theta)(1 - \sin\theta)}{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)}$$

$$= \frac{(1 - \sin\theta)^2}{1 - \sin^2\theta}$$

$$= \frac{(1 - \sin\theta)^2}{\cos\theta} = \left(\frac{1 - \sin\theta}{\cos}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$$

$$= (\sec\theta - \tan\theta)^2 = \text{बायाँ पक्ष}$$

प्रश्नावली 9·2

1. निम्नांकित कोणों के वृत्तीय फलनों का मान ज्ञात करो :

   (i) $135°$ (ii) $\frac{2\pi}{3}$ (iii) $\frac{-5\pi}{3}$, (iv) $-120°$

2. निम्नांकित त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं को सिद्ध करो :

   (i) $\sin\theta\cot\theta+\sin\theta.\ \text{cosec}\,\theta=1+\cos\theta$

   (ii) $\frac{\sin\theta\tan\theta}{1-\cos\theta}=1+\sec\theta$

   (iii) $\frac{\sin\theta}{\cot\theta+\text{cosec}\,\theta}=2+\frac{\sin\theta}{\cot\theta-\text{cosec}\,\theta}$

   (iv) $\sec\theta\,(1-\sin\theta)\,(\sec\theta+\tan\theta)=1.$

   (v) $\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}=\frac{\tan^2\theta}{(\sec\theta-1)^2}$

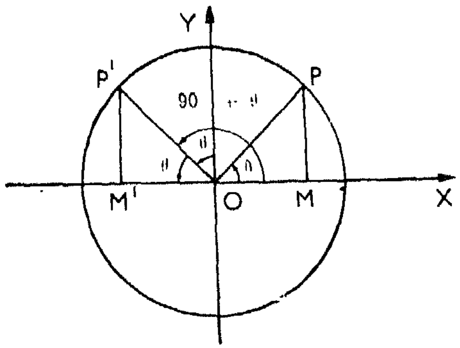
   (vi) $\frac{\text{cosec}\,\theta+\cot\theta}{\text{cosec}\,\theta-\cot\theta}=(\text{cosec}\,\theta+\cot\theta)^2$

3. यदि, θ एक धनात्मक न्यून कोण हो तो आकृति 9·8 की सहायता से सिद्ध करो कि, इस अवस्था में $\sin(\theta+90°)=\cos\theta$, $\cos(90°+\theta)=-\sin\theta$

   इससे निम्नांकित सम्बन्धों का निगमन करो :

   $\tan(90°+\theta)=-\cot\theta$, $\cot(90°+\theta)=-\tan\theta$

   $\sec(90°+\theta)=-\text{cosec}\,\theta$, $\text{cosec}\,(90°+\theta)=\sec\theta$



आकृति 9.8

4. यदि, θ धनात्मक न्यून कोण हो तो, सिद्ध करो कि,

   $\sin(-\theta)=-\sin\theta$, $\cos(-\theta)=\cos\theta$

इससे निम्नांकित सम्बन्धों का निगमन करो।

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$, $\sec(-\theta) = \sec\theta$

$\cot(-\theta) = -\cot\theta$., $\operatorname{cosec}(-\theta) = \operatorname{cosec}\theta$.

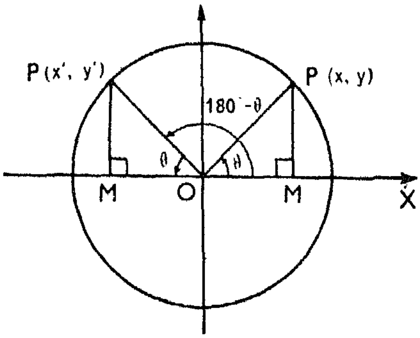
5. सिद्ध करो कि,

$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$, $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$, $\cot(180° - \theta) = -\cot\theta$

$\sec(180° - \theta) = -\sec\theta$, $\operatorname{cosec}(180° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$

(संकेत : आकृति 9.9 का प्रयोग करें)



आकृति 9·9

6. निगमन करो :

$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$, $\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$

$\tan(180° + \theta) = \tan\theta$, $\cot(180° + \theta) = \cot\theta$

$\sec(180° + \theta) = -\sec\theta$, $\operatorname{cosec}(180° + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

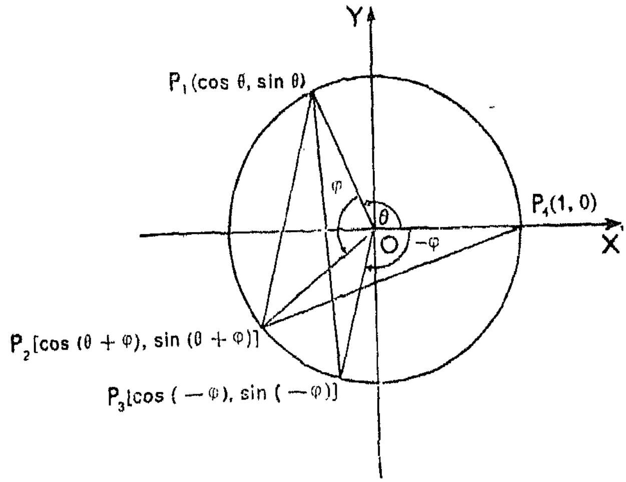
9·5. त्रिकोणमितीय फलनों के योग का सूत्र (Addition Formulae for Trigonometric Functions)

इस परिच्छेद में, हम दो कोणों के योग के त्रिकोणमितीय फलन के व्यंजकों को, कोणों के त्रिकोणमितीय फलनों के पदों में ज्ञात करेंगे।

प्रमेय *9.5.1* : किन्हीं दो कोणों θ तथा ϕ के लिए,

$$\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta \sin \sin\phi \quad (1)$$

उपपत्ति : माना, θ कोण XOP_1 तथा ϕ कोण P_1OP_2 इस तरह हैं कि ϕ की प्रारम्भिक भुजा और θ की अन्तिम भुजा एक ही है जैसा कि आकृति 9·10 में दिखाया गया है, जहाँ P_1, P_2, P_3 तथा P_4 बिन्दु, एकांक वृत्त पर है।



आकृत्ति 9·10

तब कोण XOP_2, $(\theta+\phi)$ के बराबर है। पुन: कोण P_3OP_4, $(-\phi)$ के बराबर है और $-(-\phi)+\theta=(\phi+\theta)$ है। इसलिए P_1, P_2, P_3 के निर्देशांक क्रमश: $(\cos\theta, \sin\theta)$, $[\cos(\theta+\phi), \sin(\theta+\phi)]$ तथा $[\cos(-\phi), \sin(-\phi)]$ है तथा P_4 के निर्देशांक (1,0) हैं।

P_1OP_3 तथा P_2OP_4 त्रिभुजों पर विचार करो। वे सर्वांगसम हैं (क्यों ?) इसलिये, P_2P_4 तथा P_1P_3 बराबर हैं। दूरी-सूत्र की सहायता से,

$$P_1P_3^2=[\cos\theta-\cos(-\phi)]^2+[\sin\theta-\sin(-\phi)]^2$$
$$=(\cos\theta-\cos\phi)^2+(\sin\theta+\sin\phi)^2.$$
$[\cos(-\phi)=\cos\phi,$. के प्रयोग से] तथा $\sin(-\phi)=-\sin\phi$
$$=2-2(\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi)$$ (क्यों ?)

पुन: $P_2P_4^2=[1-\cos(\theta+\phi)]^2+[0-\sin(\theta+\phi)]^2$
$$=2-2\cos(\theta+\phi)$$ (क्यों ?)

चूंकि, $P_1P_3=P_2P_4$

अत: $P_1P_3^2=P_2P_4^2$

या, $2-2\cos(\theta+\phi)=2-2(\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi)$

या, $\cos(\theta+\phi)=\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi$ (1)

समीकरण (1) में ϕ को $-\phi$ से प्रतिस्थापित करने से हम देखते हैं कि,

उपप्रमेय : $\cos(\theta-\phi)=\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi.$ (2)

यदि, हम समीकरण (1) में ϕ को $\frac{\pi}{2}$ तथा θ को $-\theta$ से प्रतिस्थापित करें तो, हम देखते हैं कि,

$$\cos\left[\frac{\pi}{2}-\theta\right]=\sin\theta$$

प्रमेय : *9·5·2* : किन्हीं दो कोणों θ तथा ϕ के लिए,

$$\sin(\theta+\phi)=\sin\theta\cos\phi+\cos\theta.\sin\phi \qquad (3)$$

उपपत्ति : $\sin(\theta+\phi)=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\theta+\phi)\right\}$ (क्यों ?)

$$=\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\phi\right\}$$

$$=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\theta\right]\cos\phi+\sin\left[\frac{\pi}{2}-\theta\right]\sin\phi$$

(प्रमेय 9·5·1 की सहायता से)

$$=\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi$$

उपप्रमेय : $\sin(\theta-\phi)=\sin\theta\cos\phi-\cos\theta\sin\phi.$ (4)

उदाहरण 1 : $\cos 15^\circ$ तथा $\cos 75^\circ$ का मान बताओ ।

हल :

$$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)$$

$$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)$$

$$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

प्रमेय *9.5.3* : यदि, θ, ϕ तथा $(\theta+\phi)$ में से कोई भी कोण $\frac{\pi}{2}$ का विषम अपवर्त्य न हो तो,

$$\tan(\theta+\phi)=\frac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi} \qquad (5)$$

उपपत्ति : चूंकि θ, ϕ तथा $(\theta+\phi)$ में से कोई भी कोण $\frac{\pi}{2}$ का विषम अपवर्त्य नहीं है, इसलिए

$\cos\theta\,.\cos\phi\neq 0$ तथा $\cos(\theta+\phi)\neq 0$ अब,

$$\tan(\theta+\phi)=\frac{\sin(\theta+\phi)}{\cos(\theta+\phi)}$$

$$=\frac{\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi}{\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi}$$

अंश तथा हर को $\cos\theta\cos\phi$ से विभक्त करने पर, हम देखते हैं कि,

$$\tan(\theta+\phi)=\frac{\dfrac{\sin\theta\cos\phi}{\cos\theta\cos\phi}+\dfrac{\cos\theta\sin\phi}{\cos\theta\cos\phi}}{\dfrac{\cos\theta\,.\cos\phi}{\cos\theta\cos\phi}-\dfrac{\sin\theta\sin\phi}{\cos\theta.\cos\phi}}$$

$$=\frac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi}$$

उपप्रमेय : $\tan(\theta-\phi)=\dfrac{\tan\theta-\tan\phi}{1+\tan\theta\tan\phi}$

जहाँ θ, ϕ तथा $(\theta-\phi)$ में से कोई भी कोण, $\dfrac{\pi}{2}$ का विषम अपवर्त्य नहीं है ।

उपपत्ति : $\tan(\theta-\phi)=\tan[\theta+(-\phi)]$

$$=\frac{\tan\theta+\tan(-\phi)}{1-\tan\theta\tan(-\phi)}$$

$$=\frac{\tan\theta-\tan\phi}{1+\tan\theta\tan\phi}$$

उदाहरण 2 : $\tan\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$ का मान ज्ञात करो ।

हल : प्रमेय 9.5.3 में, θ को $\dfrac{5}{6}\pi$ तथा ϕ को $\dfrac{\pi}{4}$ से प्रतिस्थापित करने पर, हम देखते हैं कि,

$$\tan\left(\frac{13}{12}\pi\right)=\tan\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\tan\frac{5}{6}\pi+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{5\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right).(1)\right]}+\frac{-\sqrt{3}+3}{3+\sqrt{3}}$$

$$\left(\text{क्योंकि } \tan\frac{5\pi}{6}=\frac{-\sqrt{3}}{3}\right.$$

$$=\frac{(3-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=\frac{12-6\sqrt{2}}{6}$$

$$=2-\sqrt{3}$$

ध्यान रखें कि, $\tan\dfrac{\pi}{12}=\tan\dfrac{13\pi}{12}$ (इसको सिद्ध करो ।)

अब, हम 2θ, 3θ, इत्यादि के वृतीय फलनों को कोण θ के वृतीय फलनों के पदों में व्यक्त करेंगे ।

उदाहरण 3 . सिद्ध करो कि,

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$

उपपत्ति : हम देखते हैं कि,

$$\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta) = \cos\theta \,.\, \cos\theta - \sin\theta \,.\, \sin\theta$$
$$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

इससे हम आसानी से निम्न सम्बन्ध का निगमन कर सकते हैं :

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$
$$= 2\cos^2\theta - 1$$
$$= \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

उदाहरण 4 : $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$= \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

उपपत्ति : प्रमेय 9.5.2 से, हम देखते हैं कि,

$$\sin 2\theta = \sin(\theta+\theta) = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta.$$

पुन: $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta}$$

अंश तथा हर को $\cos^2\theta\ (\neq 0)$ से विभक्त करने पर, हम देखते हैं कि

$$\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

उदाहरण 5 : सिद्ध करो कि,

$$\tan 2\ 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

उपपत्ति : प्रमेय 9.5.3 से, हम देखते हैं कि,

$$\tan 2\theta = \tan(\theta+\theta)$$
$$= \frac{\tan\theta + \tan\theta}{1-\tan\theta\,.\,\tan\theta}$$
$$= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

उपरोक्त सम्बन्ध तभी सत्य है जबकि, कोई भी सम्मिलित कोण, $\frac{\pi}{2}$ का विषम अपवर्त्य नहीं है अर्थात् न तो θ और 2θ, $\frac{\pi}{2}$ के विषम अपवर्त्य हैं।

तृतीय फलनों के योग के सूत्र के अनुप्रयोग के रूप में, निम्नांकित सम्बन्ध आसानी से सिद्ध किये जा सकते हैं :

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$
$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$
$$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

अब हम उन सूत्रों का प्रतिपादन करेंगे, जो दो वृतीय फलनों के गुणनफल को, दो वृतीय फलनों के बीजीय योग के रूप में और विलोमतः, योग को गुणनफल के रूप में व्यक्त करते हैं। इसके लिये, हम निम्नांकित सम्बन्धों पर विचार करते हैं :

$$\sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin (A+B) \quad (1)$$
$$\sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin (A-B) \quad (2)$$
$$\cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos (A+B) \quad (3)$$
$$\cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos (A-B) \quad (4)$$

समीकरण (1) तथा (2) को क्रम में जोड़ने तथा घटाने पर,

$$2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B) \quad (5)$$
$$2 \cos A \sin B = \sin (A+B) - \sin (A-B) \quad (6)$$

समीकरण (3) तक (4) को क्रम में जोड़ने तथा घटाने पर,

$$2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B) \quad (7)$$
$$2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B) \quad (8)$$

समीकरण (5) से (8) तथा की सर्वसमिकायें **गुणन सूत्र (product formulae)** के नाम से जानी जाती हैं। ये सूत्र, ज्या तथा कोटिज्या के गुणनफल को ज्या तथा कोटिज्या के बीजीय योग के पदों में व्यक्त करते हैं।

$A+B=\alpha$ तथा $A-B=\beta$ मानकर (5) से (8) तक के समीकरणों को अन्य उपयोगी रूपों में परिवर्तित किया जा सकता है। इनको A तथा B के लिये हल करने पर,

$$A = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta), \quad \text{तथा} \quad B = \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

(A+B), (A−B), A तथा B के लिये इनको प्रतिस्थापन करने पर, हम देखते हैं कि,

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad (9)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad (10)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad (11)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad (12)$$

समीकरण (9) से (12) तक की सर्वसमिकायें **योग सूत्र (Sum formulae)** के नाम से जानी जाती है। वे फलनों के बीजीय योगों को गुणनफल के पदों में व्यक्त करती हैं।

उदाहरण 6 : यदि, $A+B+C=\pi$ तो सिद्ध करो कि,

$$\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} . \sin \frac{B}{2} . \sin \frac{C}{2} .$$

हल : वाम पक्ष पर विचार करने पर,

$$\sin A + \sin B - \sin C = 2 \sin \left(\frac{A+B}{2}\right) \cos \left(\frac{A-B}{2}\right) - \sin C$$

$$=2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi-C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\sin\frac{C}{2}\right]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\sin\left\{\frac{\pi-(A+B)}{2}\right\}\right]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{(A-B)}{2}-\cos\frac{(A+B)}{2}\right]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cdot 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

= दायाँ पक्ष

प्रश्नावली 9.3

1. दिखाओ कि,

   (*i*) $\cos 70^\circ \cos 10^\circ+\sin 70^\circ \sin 10^\circ=\frac{1}{2}$

   (*ii*) $\cos 130^\circ \cos 40^\circ+\sin 130^\circ \sin 40^\circ=0$

2. निम्नांकित सर्वसमिकाओं को सिद्ध करो :

   (*i*) $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

   (*ii*) $\cot(\theta+\phi)=\frac{\cot\theta\cot\phi-1}{\cot\theta+\cot\phi}$

   (*iii*) $\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$

   (*iv*) $\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

   (*v*) $\cot 4\theta(\sin 5\theta+\sin 3\theta)=\cot\theta(\sin 5\theta-\sin 3\theta)$

   (*vi*) $\cos 7\theta+\cos 5\theta+\cos 3\theta+\cos\theta=4\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta$

sin x की आवर्तिता से, $3x=2n\pi+0$ या $2n\pi+\pi$, $n\epsilon$ **Z**

या, $x=\frac{2n\pi}{3}$ या $(2n+1)\frac{\pi}{3}$, $n\epsilon$ **Z**

यदि $\cos x=1$, तब, $x=0$ और तब $\cos x$ की आवर्तिता से, $x=2n\pi$, $n\epsilon$ **Z** .

इसलिये, उपरोक्त समीकरण का निम्नांकित समुच्चय से व्यक्ति होता है :

$$\left\{x \mid x=\frac{2\pi n}{3},\ n\epsilon\ \mathbf{Z}\right\}\cup\left\{x \mid x=(2n+1)\frac{\pi}{3},\ n\epsilon\ \mathbf{Z}\right\}$$
$$\cup\{x/x=2n\pi,\ n\epsilon\ \mathbf{Z}\}$$

या $$\left\{x \mid x=\frac{n\pi}{3},\ n\epsilon\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{x \mid x=2n\pi, n\epsilon\mathbf{Z}\right\}$$

प्रश्नावली 9.4

1. निम्नांकित समीकरणों में से, प्रत्येक का मुख्य हल निर्धारित करो :

(*i*) $\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

(*ii*) $\sec x=2$

(*iii*) $\cot 3x=-2$

(*iv*) $\operatorname{cosec} x=-6$

2. (*i*) यदि, $\sin\alpha=\sin\beta$, तो दिखाओ कि,
$\theta=n\pi+(-1)^n\beta$, जहाँ n एक पूर्णांक है।

(*ii*) यदि, $\cos\alpha=\cos\beta$ तो दिखाओ कि,
$\alpha=2n\pi\pm\beta$, जहाँ n एक पूर्णांक हैं।

(*iii*) यदि, $\tan\alpha=\tan\beta$ तो दिखाओ कि, $\alpha=n\pi+\beta$, जहाँ n एक पूर्णांक है।

3. निम्नांकित समीकरणों में से, प्रत्येक का व्यापक हल ज्ञात करो।

(*i*) $\sec x=\sec(x+\pi)$

(*ii*) $\tan 2x=-\cot\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

(*iii*) $\cos 4x=\cos 2x$

(*iv*) $\cot^2 x+\frac{3}{\sin x}+3=0$

(*v*) $\sin 2x+\sin 6x+\sin 4x=0$

(*vi*) $2\tan\alpha-\cot\alpha=-1$

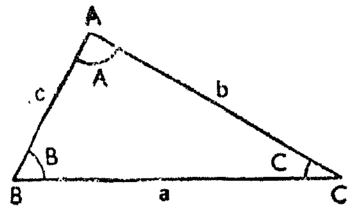
9.7. त्रिभुजों के गुणधर्म (Properties of Triangles)

एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ तथा तीन कोण उसके हिस्से कहलाते हैं। अपने ज्यामिति के पूर्व पाठ्यक्रम से स्मरण करो कि, एक त्रिभुज के निर्माण के लिए, कम से कम, एक भुजा को सम्मिलित करते हुए, तीन हिस्सों की आवश्यकता होती है।

इस प्रकार, अगर तीन हिस्सों के माप ज्ञात हों तो हम शेष तीन भागों के संभव मापों की गणना कर सकते हैं। दिये हुए भागों की सहायता से अज्ञात भागों का माप विधि को **त्रिभुज को हल करना** कहते हैं।

इस कार्य के लिए, हमें त्रिभुज की भुजाओं एवं कोणों को संबद्ध करने वाले कुछ सूत्रों की आवश्यकता होती है।

माना, ABC एक त्रिभुज है। कोण A से हमारा आशय, भुजाओं AB तथा AC के बीच के कोण से है जिसका मान $0°$ तथा $180°$ के बीच होता है। कोणों B तथा C को भी इसी तरह परिभाषित करते हैं। शीर्ष बिन्दु C, A तथा B की सम्मुख भुजाओं AB, BC तथा CA को क्रमशः c, a तथा b से प्रदर्शित करते हैं (आकृति 9·11 देखें)।



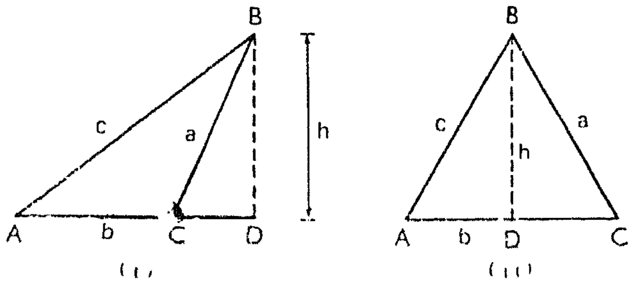
आकृति 9.11

प्रमेय : 9.7.1. किसी भी त्रिभुज में, भुजायें, अपने सम्मुख कोणों की ज्या के समानुपाती होती हैं। अर्थात् त्रिभुज ABC में,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

(यह सूत्र **ज्या-नियम (Law of Sines)** के नाम से भी जाना जाता है।)

उपपत्ति : माना, ABC, आकृति 9.12 (i) तथा (ii) में दिखाया गया कोई त्रिभुज है।



आकृति 9.12

शीर्ष बिन्दु B से, शीर्ष-लंब h इस प्रकार खींचा जाता है कि, भुजा AC से बिन्दु D पर मिले। यहाँ D, AC पर एक बिन्दु है [आकृति 9.12(i) में AC को इस प्रकार बढ़ाया गया है वह शीर्षलंब से D पर मिले]। आकृति 9.12(i) के समकोण त्रिभुज ABD से, हम देखते हैं कि,

$$\sin A = \frac{h}{c} \quad \text{या} \quad h = c \sin A \tag{1}$$

तथा $$\sin (180^\circ - C) = \frac{h}{a}$$

या, $$\sin C = \frac{h}{a}$$

या, $$h = a \sin C \tag{2}$$

समीकरण (1) तथा (2) से, हम देखते हैं कि,

$$c \sin A = a \sin C \tag{3}$$

या, $$\frac{\sin A}{a} = \frac{C \sin}{c}$$

इसी तरह,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \tag{4}$$

समीकरण (3) तथा (4) के संयोजन से, हम देखते हैं कि,

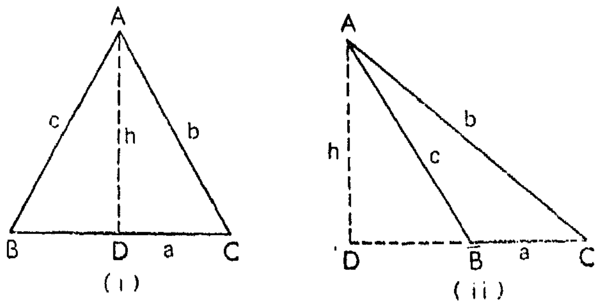
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \tag{5}$$

आकृति 9.12(ii) के त्रिभुज ABC के लिए भी, समीकरण (3) तथा (4) ठीक उसी सम्बन्ध का निरूपण करते हैं।

उदाहरण 1 : त्रिभुज ABC में, दिखाओ कि,

$$a = b \cos C + c \cos B$$
$$b = c \cos A + a \cos C$$
$$c = a \cos B + b \cos A$$

उपपत्ति : माना, ABC, आकृति 9.13 (i) तथा (ii) में दिखाये गये त्रिभुजों में से कोई भी त्रिभुज है।



आकृति 9.13

आकृति 9.13(*i*) से, हम देखते हैं कि,

$$a = BC = BD + DC$$

परन्तु $BD = c \cos B$, तथा $DC = b \cos C$

अत: $a = c \cos B + b \cos C$

इसी तरह, दूसरे सम्बन्धों को भी सिद्ध कर सकते है।

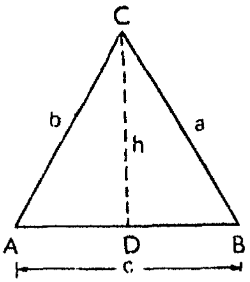
प्रमेय : 9.7.2. यदि, A, B, C, त्रिभुज ABC के कोण तथा a, b, तथा c, A, B, तथा C की सम्मुख भुजाओं की लम्बाइयाँ हों तो,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

इस सूत्र को कभी-कभी **कोटिज्या नियम (Laws of Cosines)** या **कोटिज्या सूत्र (Cosine Formulae)** के नाम से भी पुकारा जाता है।

उपपत्ति : स्थिति (I) त्रिभुज के सभी कोण 90° से कम माप के हैं।

इस स्थिति में, आकृति 9.14 में दिखाये गये त्रिभुज ABC पर विचार करो:



आकृति 9.14

शीर्ष बिन्दु C से $CD = h$ लम्ब, भुजा AB को D बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते हुए खींचो। तब, समकोण त्रिभुज BDC में,

$$a^2 = h^2 + (DB)^2$$
$$= h^2 + (c - AD)^2$$
$$= b^2 + c^2 - 2c(AD), \qquad [\text{क्योंकि } \triangle ADC \text{ में, } b^2 = h^2 + (AD)^2]$$

परन्तु $\cos A = \dfrac{AD}{b}$, या $AD = b \cos A$,

अत: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$

स्थिति (II) : त्रिभुज के एक कोण का माप 90° से ज्यादा है। इसको भी ठीक उसी तरण सिद्ध कर सकते हैं और पाठकों के लिए अभ्यास स्वरूप छोड़ दिया गया है।

प्रश्नावली 9.5

1. $\triangle$ABC में, सिद्ध करो कि,

(i) $$\frac{b+c}{a}=\frac{\cos\left[\frac{B-C}{2}\right]}{\sin\frac{A}{2}}$$

(ii) $$\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}=\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}$$

(iii) $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0$

(iv) यदि, $a\cos A=b\cos B$, तो त्रिभुज, या तो समद्विबाहु होगा या समकोण होगा ।

2. किसी समानान्तर चतुर्भुज में, यदि a तथा b, दो असमान्तर भुजाओं की लम्बाइयाँ हों, θ, इन दो भुजाओं के बीच के कोण का माप हो तथा d, उस विकर्ण की लम्बाई हो जो a तथा b भुजाओं से सार्वनिष्ठ शीर्ष रखता है तो दिखाओ कि, d का माप निम्न सम्बन्ध से व्यक्त हो सकता है :

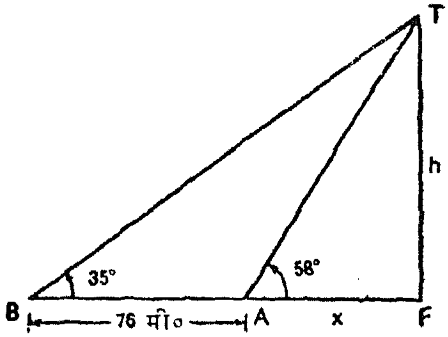
$$d^2=a^2+b^2+2ab\cos\theta.$$

उपयोग (Applications)

अपनी पूर्व कक्षाओं में, हमने ऊँचाई एवं दूरी के कुछ आसान प्रश्नों को हल किया है । इस परिच्छेद में, हम इस प्रकार के अनुप्रयोग के कुछ और उदाहरण देंगे ।

उदाहरण 1 : एक ऊर्ध्वाधर मीनार के शीर्ष का, उसी क्षैतिज तल के, जिसमें मीनार का पादमूल है, किसी बिन्दु A पर कोणीय उन्नतांश (angular elevation) 58° तथा उसी क्षैतिज रेखा में मीनार के पादमूल से जाने वाली रेखा पर बिन्दु A से 76 मी० की दूरी पर स्थित बिन्दु पर कोणीय उन्नतांश 35° है । मीनार की ऊँचाई तथा मीनार के पादमूल से A की दूरी ज्ञात करो ।

हल : माना, F तथा T, क्रमशः मीनार के पादमूल एवं शीर्ष हैं। (आकृति 9.15 देखें) । माना मीनार की ऊँचाई h मीटर तथा मीनार के पादमूल से A की दूरी x मीटर है ।



आकृति 9.15

समकोण त्रिभुजों AFT तथा BFT की सहायता से,

$$\frac{h}{x}=\tan 58^\circ \qquad (1)$$

तथा $$\frac{h}{x+76}=\tan 35^\circ \qquad (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से h को विलुप्त करने पर, हम देखते हैं कि,

$$\frac{x \tan 58^\circ}{x+76}=\tan 35^\circ$$

या, $$x=\frac{76 \tan 35^\circ}{\tan 58^\circ-\tan 35^\circ}$$

$$=\frac{76\times 0.7002}{1.600-0.7002}$$

$$=\frac{53.2152}{0.8998}$$

$=59$ मीटर (लगभग)

पुनः $$h=x \tan 58^\circ$$

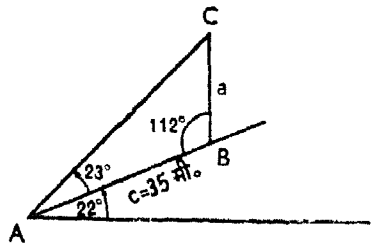
$$=59\times 1.6$$

$=94.4$ मीटर (लगभग)

अतः मीनार की ऊँचाई 94.4 मीटर तथा मीनार के पादमूल से A की दूरी 59 मीटर है।

उदाहरण 2 : एक वृक्ष ऊर्ध्वाधर दशा में, क्षैतिज से 22° का कोण बनाने वाली पहाड़ी के ऊपर, खड़ा है। वृक्ष के आधार से, पहाड़ी से सीधे नीचे 35 मी० की दूरी पर एक बिन्दु से, वृक्ष के शीर्ष का उन्नतांश कोण 45° है। वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात करो।

हल : माना, BC, वृक्ष को प्रदर्शित करता है, वृक्ष के आधार से पहाड़ी के सीधे नीचे 35 मीटर की दूरी पर का बिन्दु A है तथा वृक्ष की ऊँचाई a है। (आकृति 9.16 देखें)।



आकृति 9.16

त्रिभुज ABC में,

$$\angle BAC=45^\circ-22^\circ=23^\circ$$

$$\angle ABC=180^\circ-(90^\circ-22^\circ)=112^\circ$$

$$\angle ACB = 180° - (112° + 23°) = 45°$$

$$c = 35 \text{ मीटर ।}$$

ज्या-नियम से,

$$\frac{a}{\sin 23°} = \frac{c}{\sin 45°}$$

इसलिये,

$$a = \frac{35 \sin 23°}{\sin 45°} = 35 \times .391 \times 1.414$$

$$= 19.4 \text{ मी॰}$$

प्रश्नावली 9.6

1. एक वायुयान, एक पुल के एक सिरे के ठीक 675 मीटर ऊपर है । पुल के दूसरे सिरे का वायुयान से अवनमन (depression) कोण 56°40′ है । पुल की लम्बाई ज्ञात करो ।

2. एक पहाड़ी के शिखर पर एक बिन्दु का एक समुद्री जहाज से उन्नतांश कोण 19° है । जब जहाज सीधे पहाड़ी के पादमूल की ओर 800 मीटर चला जाता है तो A का उन्नतांश कोण 44° है । पहाड़ी की ऊँचाई ज्ञात करो ।

3. एक 50 मीटर चौड़े सड़क मार्ग के दोनों तरफ दो बराबर लम्बाई के ऊर्ध्वाधर दीप-स्तम्भ खड़े हैं । दीप-स्तम्भों के बीच सड़क मार्ग के एक बिन्दु पर दीप-स्तम्भों के शीर्षों के उन्नतांश कोण 60° तथा 30° है । प्रत्येक दीप-स्तम्भ की ऊँचाई तथा बिन्दु की स्थिति ज्ञात करो ।

4. एक ऊर्ध्वाधर प्रकाश स्तम्भ के शिखर पर बैठा आदमी उसकी तरफ सीधे आती हुई नौका को देखता है । यदि 10 मिनट में, अवनमन कोण 30° से 60° परिवर्तित हो जाता है तो यह प्रकाश स्तम्भ तक कितने देर में पहुँचेगी ?

5. एक क्षैतिज धरातल पर स्थित एक ऊर्ध्वाधर मीनार पर एक h ऊँचाई का ऊर्ध्वाधर ध्वज-दण्ड है । समतल के किसी बिन्दु पर, ध्वज-दण्ड के तल तथा शीर्ष से उन्नतांश कोण क्रमशः α तथा β हैं । सिद्ध करो कि मीनार की ऊँचाई $\dfrac{h \tan \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha}$ है ।

6. एक ऊर्ध्वाधर मीनार के शीर्ष के उसके आधार से a तथा b, $(a > b)$ दूरी पर तथा उसी रेखामें स्थित दो बिन्दुओं पर, उन्नतांश कोण एक दूसरे के पूरक हैं । सिद्ध करो कि, मीनार की ऊँचाई $\sqrt{ab}$ है तथा यदि इन बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा से मीनार के शीर्ष पर निर्मित कोण θ हो तो $\sin \theta = \dfrac{a-b}{a+b}$ है ।

7. दो नौकायें एक स्थान से एक ही समय चलती हैं । उनमें से एक N50°E दिशा में 56 कि॰ मी॰ तथा दूसरी S80°E दिशा में 48 कि॰ मी॰ जाती है । नौकाओं की नयी स्थितियों के बीच की दूरी क्या है ?

8. एक पहाड़ी के किनारे ऊर्ध्वाधर अवस्था में रखे हुए 5 मीटर के खम्भे की छाया, 7 मी० सीधी पड़ती है। छाये के सिरे पर, खम्भे द्वारा निर्मित कोण35° है। सूर्य का उन्नतांश कोण तथा पहाड़ी के किनारे का क्षैतिज से निर्मित कोण ज्ञात करो।

9. P, Q तथा R तीन कस्बे हैं। P, Q से 270 कि० मी० तथा R से 180 कि० मी० की दूरी पर है। Q से P का दिक्मान (bearing) N18°W है। Q से R का दिक्-मान N55°W है। Q तथा R के बीच की दूरी बताओ।

10. दो वृक्ष A तथा B, एक नदी के एक ही किनारे पर स्थित हैं। नदी के किसी बिन्दु C से, A तथा B वृक्षों की दूरियां क्रमशः 250 मी० तथा 300 कि० मी० हैं। यदि, कोण B, 45° का हो तो वृक्षों के बीच की दूरी ज्ञात करो।

11. एक समान्तर चतुर्भुज की बड़ी भुजा 10 से० मी० तथा छोटी भुजा से 6 से० मी० की है। यदि बड़ा विकर्ण, बड़ी भुजा से 30 का कोण बनायें तो बड़े विकर्ण की लंबाई ज्ञात करो।

—o—

उत्तरमाला

प्रश्नावली 5·1

1. हाँ, जबकि $\mathbf{a}=k\mathbf{b}$, $k \geqslant 0$ या $\mathbf{a}=\mathbf{0}$, $\mathbf{b}=\mathbf{0}$

2. 15, 6, 0

3. $k=\pm\dfrac{1}{|\mathbf{a}|}$

4. नहीं

5. हाँ

13. भुजाओं a तथा b लम्बाइयों से बना समांतर चतुर्भुज एक आयत है।

14. (*i*) $5\sqrt{2}$, पूर्व की ओर (*ii*) 10, पूर्व की ओर

15. बल का कांतिमान 50 न्यूटन है तथा F_1 से $\left(\pi+\tan^{-1}\dfrac{4}{3}\right)$ का कोण बनाता है।

16. 4 मी० प्रति सैकण्ड

17. $a\cos 40°$, $a\cos 50°$

प्रश्नावली 5·2

1. (*i*) $\sqrt{13}$; 2, 3 (*ii*) $\sqrt{5}$; 2, -1
   (*iii*) $5\sqrt{2}$; 5, -5 (*iv*) $4\sqrt{2}$; -4, -4 (*v*) $7\sqrt{2}$; -7, -7

2. (*i*) $(-1, 5)$; $\dfrac{-2}{\sqrt{13}}, \dfrac{3}{\sqrt{13}}$ (*ii*) $(4, 8)$; $\dfrac{2}{\sqrt{29}}, \dfrac{5}{\sqrt{29}}$
   (*iii*) $(4, -2)$; $\dfrac{5}{\sqrt{41}}, \dfrac{4}{\sqrt{41}}$ (*iv*) $(1, 5)$; 0, 1 (*v*) $(4, -3)$; 1, 0

3. (*i*) $\dfrac{15\sqrt{3}}{2}, \dfrac{15}{2}$ (*ii*) $-5, 5\sqrt{3}$
   (*iii*) $\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-3}{2}$ (*iv*) 5, 0 (*v*) 0,7

4. (*i*) $\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}$ (*ii*) $\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}$
   (*iii*) $4\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}$ (*iv*) $5\hat{\mathbf{i}}-9\hat{\mathbf{j}}$
   (*v*) $-5\hat{\mathbf{i}}+9\hat{\mathbf{j}}$ (*vi*) $-2\hat{\mathbf{i}}+7\hat{\mathbf{j}}$
   (*vii*) $4\hat{\mathbf{i}}-12\hat{\mathbf{j}}$ (*viii*) $2\hat{\mathbf{i}}+4\hat{\mathbf{j}}$

प्रश्नावली 5·3

1. $\sqrt{114}; \frac{-5}{\sqrt{114}}, \frac{-8}{\sqrt{114}}, \frac{5}{\sqrt{114}}$

2. (i) $\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}; \frac{1}{\sqrt{41}}, \frac{-6}{\sqrt{41}}, \frac{2}{\sqrt{41}}$ (ii) $-3\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}; \frac{-3}{\sqrt{22}}, \frac{-2}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}}$

(iii) $5\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}; \frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{4}{\sqrt{42}}$, (iv) $\hat{i}-2\hat{j}-8\hat{k}; \frac{1}{\sqrt{69}}, \frac{-2}{\sqrt{69}}, \frac{-8}{\sqrt{69}}$.

4. $7, \frac{2}{7}\hat{i}+\frac{3}{7}\hat{j}+\frac{4}{\sqrt{21}}k$

6. $\frac{-2}{\sqrt{21}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{21}}\hat{j}+\frac{4}{\sqrt{21}}k$

7. $a=-2, b=1, c=3$

8. (i) $10\hat{i}+5\hat{j}+20\hat{k}$ (ii) $5\hat{i}-6\hat{j}+5k$

(iii) $-\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i}+\frac{2}{\sqrt{5}}k$ (iv) $2\sqrt{5}\hat{i}-2\sqrt{5}\hat{j}+\sqrt{5}k$

(v) $\frac{14}{3}\hat{i}-\frac{14}{3}\hat{j}+\frac{7}{3}k$ (vi) $-\frac{2}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{1}{\sqrt{30}}$

प्रश्नावली 5·4

1. (i) 8, 8, 0, 8 (ii) $\sqrt{14}, 2\sqrt{5}, \sqrt{6}$

(iii) 8, 8; हाँ (iv) -8

(v) $\cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{70}}, \cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{30}}; 90^\circ$

2. (i) 0 (ii) 6 (iii) 3 (iv) -13 (v) 9

3. (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{4}{3}$ (iii) 3

4. (i) $-18, \cos^{-1}\left(\frac{-9}{\sqrt{111}}\right)$ (ii) $-17, \cos^{-1}\left(\frac{-17}{7\sqrt{38}}\right)$

(iii) $-1, 120^\circ$ (iv) $-50, \cos^{-1}\left(\frac{-5}{\sqrt{37}}\right)$

(v) $-6, \cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{42}}\right)$

प्रश्नावली 5·5

1. (i) $3\hat{i}-2\hat{j}+9k$ (ii) $-3\hat{i}+2\hat{j}-9\hat{k}$

(iii) $13\hat{i}+6\hat{j}-5\hat{k}$ (iv) $-15\hat{i}+10\hat{j}-\hat{k}$

(*v*) 0 (*vi*) $-3\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}-9\hat{\mathbf{k}}$

(*vii*) $6\hat{\mathbf{i}}-4\hat{\mathbf{j}}+18\hat{\mathbf{k}}$ (*viii*) $-11\hat{\mathbf{i}}-22\hat{\mathbf{j}}+11\hat{\mathbf{k}}$

(*ix*) $15\hat{\mathbf{i}}-10\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$ (*x*) $-\hat{\mathbf{i}}-14\hat{\mathbf{j}}-3\hat{\mathbf{k}}$

2. (*i*) $\pm\hat{\mathbf{j}}$ (*ii*) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(-\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}})$

(*iii*) $\pm\frac{1}{\sqrt{61}}(6\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}-4\hat{\mathbf{k}})$ (*iv*) $\pm\frac{1}{\sqrt{14}}(-2\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}})$

(*v*) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}})$

3. (*i*) $3\sqrt{3}$ (*ii*) 2
(*iii*) $4\sqrt{2}$ (*iv*) $\sqrt{217}$ (*v*) 3

4. भुजाओं a तथा b से बने समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल, इसके विकर्णों से बने समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा है।

5. a, b तथा c एक तलीय सदिश हैं।

6. $\frac{5\sqrt{10}}{2}$, $\angle A=\cos^{-1}\left(\frac{23}{\sqrt{779}}\right)$, $\angle B=\cos^{-1}\left(\frac{18}{\sqrt{574}}\right)$,
$\angle C=\cos^{-1}\left(-\frac{4}{\sqrt{266}}\right)$

प्रश्नावली 5·6

1. (*i*) 286 (*ii*) 6 (*iii*) 510 (*iv*) 4
2. हाँ

प्रश्नावली 6·1

1. (*i*) 6 (*ii*) -31
(*iii*) $\cos^2\theta-\sin^2\theta$ (*iv*) $\sqrt{2\pi}+\frac{1}{2}$
(*v*) x^3-3x^2+x-1

2. (*i*) $\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}; -\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}; -\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}; 1$

(*ii*) $\begin{vmatrix}40&58\\28&40\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}18&58\\12&40\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}18&40\\12&28\end{vmatrix}; -\begin{vmatrix}40&58\\28&40\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}18&58\\12&40\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}18&40\\12&28\end{vmatrix}; 0$

(*iii*) $\begin{vmatrix}a&bc\\c&ab\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1&bc\\1&ab\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1&a\\1&c\end{vmatrix}; -\begin{vmatrix}a&bc\\c&ab\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1&bc\\1&ab\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1&a\\1&c\end{vmatrix};$
$(a-b)(b-c)(c-a)$

(iv) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$; 20

(v) $\begin{vmatrix} x & x \\ x & x+\lambda \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x+\lambda & x \\ x & x+\lambda \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x+\lambda & x \\ x & x \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x & x \\ x & x+\lambda \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x+\lambda & x \\ x & x+\lambda \end{vmatrix},$

$-\begin{vmatrix} x+\lambda & x \\ x & x \end{vmatrix}$; $\lambda^2 (\lambda+3x)$

(vi) $\begin{vmatrix} a & b+c \\ c & a+b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & b+c \\ 1 & a+b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & c \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a & b+c \\ c & a+b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & b+c \\ 1 & a+b \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & c \end{vmatrix}$;0

3. (i) $x=\frac{-5}{13}, y=\frac{-7}{13}$ (ii) $x=5, y=-3, z=-2$

(iii) $x=1, y=2, z=1$ (iv) $x=\frac{2}{3}, y=-\frac{1}{2}, z=2$

(v) $x=\frac{-19}{18}, y=\frac{8}{3}, z=\frac{65}{18}$ (vi) अनन्त हल हैं

5. 13, 2, 5

6. 1·30 रु० प्रति किलोग्राम 2·25 रु० प्रति किलोग्राम 2·40 रु० प्रति किलोग्राम

7. 19 से० मी०, 15 से० मी०, 11 से० मी० 8. $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+6$

प्रश्नावली 6·2

1. $1\times24, 24\times1, 2\times12, 12\times2, 3\times8, 8\times3, 4\times6, 6\times4; 1\times13, 13\times1$

2. (i) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

3. $x=3, y=7, z=-2, w=14$

4. (i) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -13 & -5 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (vi) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, हाँ

5. (i) $\begin{pmatrix} 11 & 16 & 9 \\ 1 & -6 & -7 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} -10 & -14 & -6 \\ -2 & 6 & 9 \\ -6 & -11 & 1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -4 \\ 10 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, हाँ

6. (i) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} (x+y)^2 & (y+z)^2 \\ (x+z)^2 & (x-y)^2 \end{pmatrix}$

7. (i) $\begin{pmatrix} -11 & 3a-b+4c & 20 \\ 5 & 2a+3b+c & 10 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 14 & -16 \\ 20 & -14 \end{pmatrix}$ (iv) $\left((9 \quad -7 \quad 16)\right)$

(v) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 12 & 5 & 4 \\ -9 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ (vi) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

8. (i) $(60 \quad 196 \quad 348)$ (ii) $\begin{pmatrix} 24 \\ 29 \end{pmatrix}$

(iii) (13) (iv) (12)

10. (i) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{-i}{2} \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2x^3} & 1 & -1 \\ & x & x \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

11. (i) $x=2, y=-3$ (ii) $x=\frac{5}{11}, y=\frac{12}{11}$

(iii) $x=\frac{-6}{11}, y=\frac{-19}{11}$ (iv) $x=-1, y=4$

(v) $x=1, y=\frac{1}{2}, z=-\frac{3}{2}$ (vi) $x=2, y=-1, z=1$

13. (i) $x=1, 2; y=3\pm 3\sqrt{2}$ **14.** नहीं

(ii) 5, −3 (b) 5000 रु०, 25000 रु०

15. (a) 15000 रु०, 15000 रु०

(c) 25000 रु०, 5000 रु०

16. (a) (144 60 72), $\begin{pmatrix} 40 \\ 125 \\ 35 \end{pmatrix}$ (120 72 84), $\begin{pmatrix} 40 \\ 125 \\ 35 \end{pmatrix}$

(132 156 96), $\begin{pmatrix} 40 \\ 125 \\ 35 \end{pmatrix}$

(b) 157·80 रु०, 167·40 रु०, 28·40 रु०

17. 1597·20 रु०

18. (a) (9, 9), (15, 15) (b) (−3, −3), (−5, −5)

(c) (−3, 3), (−5, 5) (d) (3, −3), (5, −5)

(e) (3, −3), (5, −5) (f) (−3, 3), (−5, 5)

(g) $\left(\frac{3\sqrt{2}-3}{2}, 3\sqrt{2}\right), \left(\frac{5\sqrt{2}-5}{2}, 5\sqrt{2}\right)$

19. (a) (0, 0), (−3, 2), (−2, 3) (b) (0, 0), (3, −2), (2, −3)

y-अक्ष का परावर्तन x-अक्ष का परावर्तन

(c) (0, 0), (12, −8), (8, −12)

x-अक्ष का परावर्तन तथा फिर विवर्धन

20. (*a*) $(0,\ 0), \left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\ \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$

(*b*) $(0, 0), (0, 1), (-1, 1), (-1, 0)$

(*c*) $(0, 0)\ (0, -1), (1, -1), (1, 0)$

21. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

22. (*i*) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (*ii*) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

24. $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{5}{14} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$

प्रश्नावली 7.1

1. (*i*) $\sqrt{97}$ (*ii*) $2a\left|\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right|$

4. $5, -3$ **5.** $(3, 0)$

6. $x-y=3$

प्रश्नावली 7.2

1. $(1, \frac{1}{2}), \left[\frac{a(\cos\alpha+\cos\beta)}{2}, \frac{a(\sin\alpha+\sin\beta)}{2}\right]$

2. $(-6, 7)$ **4.** 5

5. $(8, 4)$ **6.** $(1, -2)$

8. $(4, 0)$ **9.** $(-4, -15)$

प्रश्नावली 7.3

1. (*a*) आनति कोण न्यून कोण है

(*b*) x-अक्ष के समान्तर या x-अक्ष के सम्पाती है

(*c*) आनति कोण अधिक कोण है

2. (*a*) 0 (*b*) 1 (*c*) परिभाषित नहीं है (*d*) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. (*a*) 0 (*b*) -1 (*c*) $-\frac{1}{6}$

5. (*a*) समान्तर (*b*) कोई नहीं (*c*) लम्ब (*d*) समान्तर

6. 1 **7.** 9

10. (a) $\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई (b) 18 वर्ग इकाई
(c) $\frac{75}{2}$ वर्ग इकाई (d) $\frac{57}{2}$ वर्ग इकाई

प्रश्नावली 7·5

1. $5x+3y=9$
2. $x^2-8x-4y+20=0$
3. $y=3x$
4. $x^2+y^2+2a\frac{(n^2+1)}{n^2-1}x-2cy+a^2+c^2=0,\ n\neq 1;\ x=0,\ n=1$
5. $y^2-8y-4x+20=0$
6. $\frac{2x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$
7. $y=\frac{2}{3}x$
8. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1,\ x>0$
9. $20x^2+36y^2<405$
10. $x^2+y^2+2x-4y-4>0$

प्रश्नावली 7.6

1. $y=2x-5$
2. $y=-(3x+4)$
3. $y=-2(x+9)$
4. $y=-2(2x+1)$
5. $x=0$
6. $5y=3x-15$
7. $x=2$
8. $y=-2$
9. $y=x$
10. $y=5(x+1)$
11. $3y=2x+12$
12. $3y=5(x+3)$
13. $y=-2x+6,\ 9y=x-22,\ 4y=11x+43$
14. $x=2,\ 7y=6x+79,\ 7y=-(6x+65)$
15. $5y=-2x+18$
16. $3y=2x-7$
17. (i) $-4,\ 5$ (ii) $-1,\ 0$
(iii) $0,\ -2$ (iv) $2,\ 0$
18. (i) $y+x-3\sqrt{2}=0$ (ii) $y+\sqrt{3}x-10=0$
(iii) $y-x+5\sqrt{2}=0$ (iv) $y=1$
(v) $x=4$ (vi) $2x=1$
19. (i) $-\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}y+\sqrt{2}=0,\ \sqrt{2}$
(ii) $-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+\frac{9}{5}=0,\ \frac{9}{5}$ (iii) $x=4,\ 4$
(iv) $y=2,\ 2$
20. $x-4y-7=0$
21. $x+y\pm 5\sqrt{2}=0$

प्रश्नावली 7·7

1. संपाती हैं
2. प्रतिच्छेद करती हैं
3. प्रतिच्छेद करती हैं
4. संपाती हैं
5. लम्ब
6. लम्ब
7. समान्तर
8. $\frac{16}{5}$
9. $\frac{2}{\sqrt{5}}$
10. $\frac{12}{5}$
11. 2
12. 0
13. 2
14. 1

प्रश्नावली 7·8

1. (i) $2x+29y=0$ (ii) $13x-19y=83$
(iii) $x+12y=1$ (iv) $3x-29y=29$
2. (i) $42x+21y=257$ (ii) $21y=113$
(iii) $7x=24$ (vi) $63x+105y=781$
3. $15x+12y=7$
4. $6x-17y=-24$

प्रश्नावली 7·9

1. (i) $(0, 1), \sqrt{2}$ (ii) $(-5, 3), \sqrt{30}$
(iii) $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{3}\right), \frac{1}{2}$ (iv) $(2, -3)\ 3\sqrt{2}$
(v) $\left(\frac{1}{2}, -1\right), \frac{\sqrt{17}}{2}$
2. (i) $36x^2+36y^2-36x-18y+11=0$ (ii) $x^2+y^2+6x+4y-36=0$
(iii) $x^2+y^2+6x+2y-90=0$ (iv) $x^2+y^2-2x+6y-40=0$
(v) $13x^2+13y^2-64x+10y-332=0$ (vi) $x^2+y^2+4x+6y-12=0$

प्रश्नावली 7·10

1. (i) $x+y=2,\ x-y=0$ (ii) $x-3y=10,\ 3x+y=0$
(iii) $3x+4y=-25,\ 4x-3y=0$ (iv) $11x-2y=46,\ 2x+11y+3=0$
(v) $11x-2y=16,\ 2x+11y=37$ (vi) $4x+3y+6=0,\ 3x-4y+17=0$
(vii) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=a(1+\cos\alpha),\ y\cos\alpha-x\sin\alpha=a\sin^2\alpha$
3. $\left[\frac{-mc\pm\sqrt{a^2(1+m^2)-c^2}}{(1+m^2)}, \frac{c\pm\sqrt{a^2(1+m^2)-c^2}}{(1+m^2)}\right];\ a^2(1+m^2)=c^2$
4. $a^2(l^2+m^2)=n^2$

प्रश्नावली 7·11

1. $x^2+y^2-4x+2y+(5-r^2)=0,\ x^2+y^2-4x+2y-4=0$
2. $x^2+y^2+8x-4y+(20-r^2)=0,\ 2x^2+2y^2+16x-8y-41=0$
3. $x^2+y^2-6x+10y+(34-r^2)=0,\ x^2+y^2-6x+10y+9=0$
4. (*i*) $6x^2+6y^2-44x+43=0$ (*ii*) $23x^2+23y^2-156x+38y+168=0$

प्रश्नावली 8·1

1. हाँ, $\mathbf{R}-\{2\}$, $\mathbf{R}-\{1\}$
2. नहीं
3. हाँ, सभी $x\geqslant 0$, के लिए सभी, $x\geqslant 0$ के लिए
4. हाँ, **R**, **R**
5. हाँ, सभी $x\leqslant 1$ के लिए, **R**
6. हाँ, $\{-1\}$, $\mathbf{R}-\{3\}$

11. विषम

प्रश्नावली 9·1

1. $\frac{20}{3}\pi$ से० मी०
2. $12\ \pi$ रेडियन
3. $12°\ 36'$
4. $5:4$
5. $7°\ 38'\ 11''$, $11°\ 27'\ 16''$, $14°\ 30'\ 33''$

प्रश्नावली 9·2

1.

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$
(*i*)	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
(*ii*)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
(*iii*)	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
(*iv*)	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$

प्रश्नावली 9·3

3. (*i*) $\frac{336}{625}$, $\frac{-527}{625}$, $\frac{-336}{527}$ (*ii*) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$

4. $\frac{2}{11}$, प्रथम चतुर्थांश

5. (*i*) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (*ii*) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (*iii*) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (*iv*) 1

प्रश्नावली 9·4

1. (*i*) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ (*ii*) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$

(*iii*) $\frac{n\pi}{3}-\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{1}{2},\ n=1, 2, \ldots, 6$ (*iv*) $\pi+\sin^{-1}\frac{1}{6},\ 2\pi-\sin^{-1}\frac{1}{6}$

3. (i) $x=(2n-1)\frac{\pi}{2}$, $n\in Z$ (ii) $x=n\pi+\frac{2\pi}{3}$, $n\in Z$

(iii) $x=\frac{n\pi}{3}$, $n\in Z$

(iv) $x=n\pi+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{2}$ या $x=nx+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}$ $n\in Z$

(v) $x=\frac{n\pi}{4}$ या $x=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$, $n\in Z$

(iv) $x=n\pi-\frac{\pi}{4}$ या $x=n\pi+\tan^{-1}(\frac{1}{2})$, $n\in Z$

प्रश्नावली 9·6

1. 444 मी०   2. 428.15 मी०
3. 21.65 मी० बिन्दु एक स्तम्भ से 12.5 मी० की दूरी पर है
4. 15 मिनट   7. 44.43 मी०
8. 36° 35′, 1° 35′
9. R, Q से 290 मी० या 140 मी० की दूरी पर हो सकता है।
10. 344.7 मी०, 79.85 मी०   11. 11·97 मी०